Publishing House
AKAPIT

COMPUTER METHODS IN MATERIALS SCIENCE
Informatyka w Technologii Materiałów

Vol. 6, 2006, No. 2

PEWNE RODZINY KRZYWYCH BÉZIERA

BOGUSŁAW BOŻEK[1], PROKOP ŚRODA[2]

[1] Wydział Matematyki Stosowanej, AGH Kraków
[2] Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, AGH Kraków

SOME FAMILYS OF BÉZIER CURVES

Abstract

In this paper some interesting families of Bézier curves are constructed. In particular, these curves can be used to uniform approximation of polygons or saw-tooth functions.

Key words: Bézier curves, Bézier splines, B-splines,uniform approximation AMS MSC: 65D10, 65D07, 65D17, 65D18

WPROWADZENIE

Definicja krzywej Béziera dopuszcza replikowanie punktów wiodących. Pozwala to na definicję pewnych rodzin krzywych Béziera o ciekawych własnościach. Rodziny te można np. wykorzystać do jednostajnej aproksymacji funkcji piłokształtnych, schodkowych, trapezowych, takich które często opisują charakterystyki prądowe nieliniowych obwodów elektrycznych (patrz Mitkowski, 1999). Innym zastosowaniem jest jednostajna aproksymacja wielokątów gładkimi krzywymi, w tym wypadku wielomianami.

Do wyznaczenia punktu na wielomianowej krzywej Béziera niepotrzebna jest znajomość współczynników wielomianów określających jej współrzędne, gdyż wykorzystuje się do tego celu efektywny algorytm de Casteljau.

1. DEFINICJA KRZYWEJ BÉZIERA

Krzywą Béziera definiuje się (patrz Kiciak, 2000) jako kombinację liniową wielomianów Bernsteina

$$Q_n(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i \qquad t \in [0,1],$$

gdzie $P_i = (x_i, y_i, z_i) \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ są danymi punktami przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$, zaś wielomiany Bernsteina są opisane zależnościami

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i} t^i,$$

gdzie $t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Wielomiany te posiadają następującą własność:

$$B_i^n(t) = (1-t) B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t)$$

dla $t \in [0,1], \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, która jest podstawą efektywnego algorytmu (de Casteljau) obliczania $Q_n(t)$, czyli wyznaczania dowolnego punktu krzywej Béziera.

 ISSN 1641-8581

Algorytm geometryczny de Casteljau (patrz Bożek i Środa, 2002, czy też Hoschek i Lasser, 1992):

1. Wybieramy $t \in [0,1]$,
2. Dla $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ podstawiamy $P_{i,0} \leftarrow P_i$,
3. Dla $j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \in \{j, j+1,\ldots,n\}$ podstawiamy

$$P_{i,j} \leftarrow (1-t)P_{i-1,j-1} + tP_{i,j-1},$$

4. $Q_n(t) := P_{n,n}$.

Wprost z definicji mamy $Q_n(0) = P_0$, $Q_n(1) = P_n$, czyli krzywa Béziera przechodzi przez początkowy i końcowy punkt wiodący tj. P_0 i P_n. Pochodne w tych punktach są określone zależnościami

$$Q'_n(0) = n \cdot (P_1 - P_0)\,, \quad Q'_n(1) = n \cdot (P_n - P_{n-1})\,,$$

a zatem styczna do krzywej Béziera w punkcie P_0 przechodzi przez punkty P_0 i P_1 oraz styczna w punkcie P_n przechodzi przez punkty P_n i P_{n-1}.

2. RODZINA KRZYWYCH $S_{k,n}$

Definicja krzywej Béziera dopuszcza przypadek w którym punkty wiodące nie są parami różne, zatem każdy z zadanych punktów wiodących można replikować. Pozwala to zdefiniować pewne rodziny krzywych Béziera o ciekawych własnościach. Mając $(k+1)$ punktów wiodących ($k \geqslant 2$) możemy przyjąć dowolnie duże n określajace stopień wielomianów Bernsteina replikując $(n-k)$ krotnie jeden, lub kilka wybranych punktów. Suma replikacji musi być równa $(n-k)$. Można to oczywiście zrobić na wiele sposobów. Jednym z nich jest określenie rodziny krzywych $S_{k,n}$ zgodnie ze wzorami:

$$S_{k,n}(t) :=$$

$$:= \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} B_i^n(t)P_i + \Big(\sum_{i=\frac{k}{2}}^{n-\frac{k}{2}} B_i^n(t)\Big)P_{\frac{k}{2}} + \\ + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} B_{n-k+i}^n(t)P_i \\ \quad \text{dla} \quad k \quad \text{parzystego}, \quad n \geqslant k, \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}-1} B_i^n(t)P_i + \\ + \Big(\sum_{i=\frac{k-1}{2}}^{\frac{n}{2}-1} B_i^n(t)\Big)P_{\frac{k-1}{2}} + \\ + \frac{1}{2}B_{\frac{n}{2}}^n(t)\big(P_{\frac{k-1}{2}} + P_{\frac{k+1}{2}}\big) + \\ + \Big(\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{\frac{2n-k+1}{2}} B_i^n(t)\Big)P_{\frac{k+1}{2}} + \\ + \sum_{i=\frac{k+1}{2}+1}^{k} B_{n-k+i}^n(t)P_i \\ \quad \text{dla} \quad k \quad \text{nieparzystego}, \\ \quad n \quad \text{parzystego}, \quad n \geqslant k+1, \\ \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}-1} B_i^n(t)P_i + \sum_{i=\frac{k-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} B_i^n(t)P_{\frac{k-1}{2}} + \\ \quad + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{\frac{2n-k+1}{2}} B_i^n(t)P_{\frac{k+1}{2}} + \\ + \sum_{i=\frac{k+1}{2}+1}^{k} B_{n-k+i}^n(t)P_i \\ \quad \text{dla} \quad k \quad \text{nieparzystego}, \\ \quad n \quad \text{nieparzystego}, \quad n \geqslant k. \end{cases}$$

Krzywa $S_{k,n}$ jest krzywą Béziera $Q_n(t)$ wyznaczoną przez punkty wiodące $\widetilde{P}_i$ $(i = 0,\ldots,n)$ zdefiniowane wzorami

$$\begin{array}{lll} \widetilde{P}_i = P_i & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{k}{2}-1, \\ \widetilde{P}_{\frac{k}{2}+i} = P_{\frac{k}{2}} & \text{dla} & i = 0,\ldots,n-k, \\ \widetilde{P}_{\frac{2n-k+2}{2}+i} = P_{\frac{k+2}{2}+i} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{k}{2}-1 \end{array}$$

dla k parzystego $(n \geqslant k)$,

$$\begin{array}{lll} \widetilde{P}_i = P_i & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{k-3}{2}, \\ \widetilde{P}_{\frac{k-1}{2}+i} = P_{\frac{k-1}{2}} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{n-k-1}{2}, \\ \widetilde{P}_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\big(P_{\frac{k-1}{2}} + P_{\frac{k+1}{2}}\big), & & \\ \widetilde{P}_{\frac{n+2}{2}+i} = P_{\frac{k+1}{2}} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{n-k-1}{2}, \\ \widetilde{P}_{\frac{2n-k+3}{2}+i} = P_{\frac{k+3}{2}+i} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{k-3}{2}, \end{array}$$

dla k nieparzystego i n parzystego $(n \geqslant k+1)$, oraz

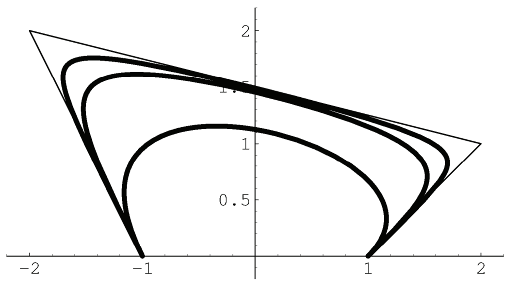
$$\begin{array}{lll} \widetilde{P}_i = P_i & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{k-3}{2}, \\ \widetilde{P}_{\frac{k-1}{2}+i} = P_{\frac{k-1}{2}} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{n-k}{2}, \\ \widetilde{P}_{\frac{n+1}{2}+i} = P_{\frac{k+1}{2}} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{n-k}{2}, \\ \widetilde{P}_{\frac{2n-k+3}{2}+i} = P_{\frac{k+3}{2}+i} & \text{dla} & i = 0,\ldots,\frac{k-3}{2}. \end{array}$$

dla k nieparzystego i n nieparzystego $(n \geqslant k)$. W konsekwencji do wyliczania wartości $S_{k,n}(t)$ można wykorzystać efektywny algorytm de Casteljau.

W przypadku dwuwymiarowym, krzywe rodziny $S_{k,n}$ leżą w obszarze pomiędzy krzywą Béziera $Q_k(t)$ a łamaną $L_k(t)$ łączącą punkty wiodące:

$$L_k(t) := kt(P_{i+1} - P_i) + (i+1)P_i - iP_{i+1}$$
$$t \in \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right], \quad i = 0,1,\ldots,k-1.$$

Przykład 1 *Rysunek 1 przedstawia krzywą Béziera Q_3 i krzywe $S_{3,6}$, $S_{3,8}$ wyznaczone przez punkty wiodące $P_0 = (-1,0)$, $P_1 = (-2,2)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (1,0)$*



Rysunek 1. Krzywe $S_{3,6}$ i $S_{3,8}$ oraz krzywa Béziera $Q_3(t)$ z przykładu 1

Curves $S_{3,6}$, $S_{3,8}$ and Bézier curve from example 1.

Szczególne znaczenie mają krzywe $S_{2,n}$ wyznaczone przez trzy punkty wiodące. Równanie krzywych tej rodziny redukuje się do wzoru

$$S_{2,n}(t) := B_0^n(t)P_0 + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t)\Big)P_1 + B_n^n(t)P_2$$

Łamana $L_2(t)$ składa się z dwóch odcinków

$$L_2(t) := 2t(P_{i+1} - P_i) + (i+1)P_i - iP_{i+1}$$
$$t \in \left[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\right], \quad i = 0, 1.$$

Z poprzednich rozważań wynika, że styczna do krzywej $S_{2,n}$ w punkcie P_0 przechodzi przez punkty P_0 i P_1, a styczna w punkcie P_2 przechodzi przez punkty P_1 i P_2.
Pole R_n pomiędzy krzywą $S_{2,n}$ a łamaną L_2 najłatwiej policzyć, gdy punkty P_0 i P_2 leżą na osi Ox, a punkt P_1 na osi Oy. Oczywiście, dowolną trójkę punktów można przez izometrię na płaszczyźnie tak przekształcić, aby spełniała powyższy warunek. Niech zatem $P_0 = (\bar{x}_1, 0)$, $P_1 = (0, \bar{y})$, $P_2 = (\bar{x}_2, 0)$. Wtedy

$$S_{2,n}(t) := \Big(B_0^n(t)\bar{x}_1 + B_n^n(t)\bar{x}_2, \Big(\sum_{i=1}^{n-1} B_i^n(t)\Big)\bar{y}\Big) =$$
$$= \Big((1-t)^n\bar{x}_1 + t^n\bar{x}_2, \big(1 - t^n - (1-t)^n\big)\bar{y}\Big)$$
$$\text{dla} \quad t \in [0,1]$$

oraz

$$L_2(t) = \begin{cases} \big((1-2t)\bar{x}_1, 2t\bar{y}\big) & \text{dla} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \big((2t-1)\bar{x}_2, (2-2t)\bar{y}\big) & \text{dla} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Dla prostoty i łatwej interpretacji obliczeń możemy jeszcze założyć, że $\bar{y} \geqslant 0$ oraz $\bar{x}_2 \geqslant \bar{x}_1$. Nieskomplikowane rachunki pozwalają stwierdzić, że pole zawarte między osią Ox i krzywą $S_{2,n}$ jest równe

$$\frac{1}{2}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\bar{y} - n(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\bar{y}\int_0^1 (1-t)^n t^{n-1}\, dt$$

przy czym pierwszy składnik jest polem trójkąta $P_0P_1P_2$. Tak więc pole R_n jako różnica pola trójkąta $P_0P_1P_2$ i pola między osią Ox a krzywą $S_{2,n}$ wynosi

$$R_n = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\bar{y}J_n, \qquad J_n := n\int_0^1 (1-t)^n t^{n-1}\, dt$$

Wartość J_n nietrudno policzyć i jest ona równa

$$J_n = n\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{1}{n+i},$$

ale wyrażenie to jest dosyć złożone i trudne do analizy. Łatwo pokazać natomiast, że ciąg J_n ma granicę równą zero. Funkcja $\varphi(t) = (1-t)^n t^{n-1}$ ma maksimum w punkcie $\frac{n-1}{2n-1}$ równe $\varphi\big(\frac{n-1}{2n-1}\big) = \frac{n^n(n-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2n-1}}$, tak więc korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całek dostajemy oszacowanie

$$J_n \leqslant \frac{n^{n+1}(n-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2n-1}}$$

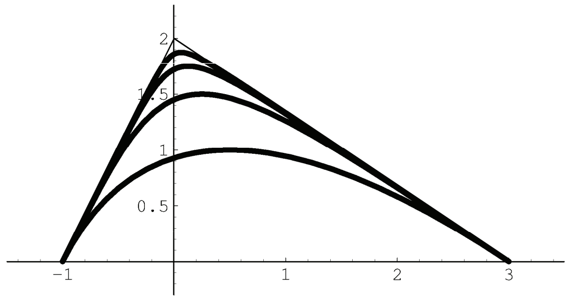
przy czym ciąg po prawej stronie nierówności jest zbieżny do zera. W konsekwencji mamy zatem

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Krzywa $S_{2,n}$ zawiera się w trójkącie $P_0P_1P_2$ przy czym $S_{2,n}(0) = P_0$, a $S_{2,n}(1) = P_2$. Odległość punktu P_1 od krzywej $S_{2,n}$ jest równa $\frac{1}{2^{n-1}}\bar{y}$, tak więc ciąg krzywych $S_{2,n}$ jest zbieżny jednostajnie do łamanej L_2.

W przypadku ogólnym $R_n = 2R_T J_n$, gdzie R_T jest polem trójkąta $P_0P_1P_2$, a odległość punktu P_1 od krzywej $S_{2,n}$ jest równa $\frac{1}{2^{n-1}}h_T$, gdzie h_T jest wysokością trójkąta $P_0P_1P_2$ względem boku P_0P_2.

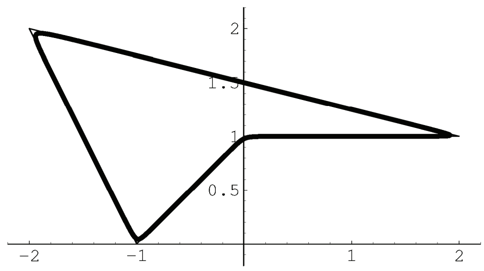
Przykład 2 *Niech* $\bar{x}_1 = -1$, $\bar{x}_2 = 3$, $\bar{y} = 2$. *Rysunek 2 przedstawia krzywe* $S_{2,n}$ $(n = 2, \ldots, 5)$ *wyznaczone przez punkty wiodące* $P_0 = (\bar{x}_1, 0)$, $P_1 = (0, \bar{y})$, $P_2 = (\bar{x}_2, 0)$. *Krzywa* $S_{2,2}$ *jest oryginalną krzywą Béziera* Q_2.



Rysunek 2. Krzywe $S_{2,n}$ z przykładu 2.
Curves $S_{2,n}$ from example 2.

Krzywe rodziny $S_{2,n}$ znakomicie nadają się np. do aproksymacji funkcji piłokształtnych i łamanych funkcjami gładkimi, a także do aproksymacji wielokątów gładkimi krzywymi. W tym celu należy przy ustalonym n $(n \geqslant 2)$ skonstruować splin z krzywych rodziny $S_{2,n}$ biorąc jako punkty wiodące P_0 i P_2 środki sąsiednich boków, a jako punkt wiodacy P_1 wierzchołek. Do obliczenia wartości $S_{2,n}(t)$ korzystamy z algorytmu de Casteljau biorąc jako punkty wiodące $\widetilde{P}_0 = P_0$, $\widetilde{P}_i = P_1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\widetilde{P}_n = P_2$.

Przykład 3 *Rysunek* 3 *przedstawia wypełnienie splinami* $S_{2,5}$ *wielokąta o wierzchołkach* $P_0 = (-1, 0)$, $P_1 = (-2, 2)$, $P_2 = (2, 1)$, $P_3 = (0, 1)$.



Rysunek 3. Wypełnienie wielokąta splinami $S_{2,5}$.
Approximating polygon by splines $S_{2,5}$.

3. RODZINA KRZYWYCH $\widetilde{S}_{k,m}$

Rozważymy teraz rodzinę krzywych $\widetilde{S}_{k,m}$ zdefiniowaną wzorem

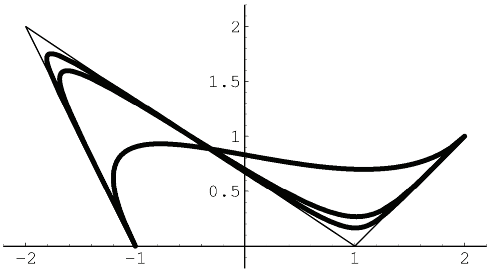
$$\widetilde{S}_{k,m}(t) := B_0^{m(k-1)+1}(t)P_0 + \\ + \sum_{i=1}^{k-1}\Big(\sum_{j=1}^{m} B_{m(i-1)+j}^{m(k-1)+1}(t)\Big)P_i + B_{m(k-1)+1}^{m(k-1)+1}(t)P_k$$

przy czym $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$. Rodzina ta stanowi naturalne uogólnienie rodziny $S_{2,n}$, przy czym $\widetilde{S}_{2,m} = S_{2,m+1}$. W przypadku dwuwymiarowym, krzywe rodziny $\widetilde{S}_{k,m}$ leżą w obszarze pomiędzy krzywą Béziera $Q_k(t)$ a łamaną $L_k(t)$ łączącą punkty wiodące. W podobny sposób, jak dla krzywych $S_{2,n}$ można pokazać, że

$$\lim_{m\to\infty} \widetilde{S}_{k,m} = L_k$$

przy czym jest to zbieżność jednostajna.

Przykład 4 *Rysunek 4 przedstawia krzywą Béziera Q_3 i krzywe $\widetilde{S}_{3,3}$, $\widetilde{S}_{3,4}$ wyznaczone przez punkty wiodące $P_0 = (-1,0)$, $P_1 = (-2,2)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (2,1)$.*



Rysunek 4. Krzywe $\widetilde{S}_{3,3}$ i $\widetilde{S}_{3,4}$ oraz krzywa Béziera $Q_3(t)$ z przykładu 4.
Curves $\widetilde{S}_{3,3}$, $\widetilde{S}_{3,4}$ and curve $Q_3(t)$ from example 4.

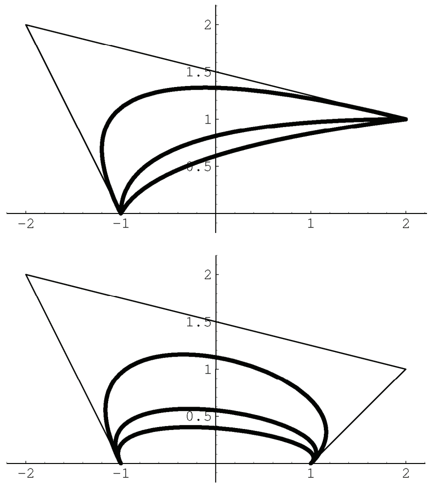
4. RODZINA KRZYWYCH $\widehat{S}_{k,q}$

Rozważymy teraz rodzinę krzywych $\widehat{S}_{k,q}$ zdefiniowaną wzorem

$$\widehat{S}_{k,q}(t) := \\ := \begin{cases} B_0^2(t)P_0 + \frac{1}{q}B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2 \\ \quad \text{dla} \quad k=2, \\ \Big(B_0^k(t) + \frac{q-1}{q}B_1^k(t)\Big)P_0 + \\ +\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{k-1} B_i^k(t)P_i + \\ +\Big(\frac{q-1}{q}B_{k-1}^k(t) + B_k^k(t)\Big)P_k \\ \quad \text{dla} \quad k \geqslant 3, \end{cases}$$

przy czym $q \geqslant 1$ i parametr ten może być liczbą naturalną, lub rzeczywistą. Dla $q = 1$ krzywa $\widehat{S}_{k,q}$ pokrywa się z oryginalną krzywą Béziera Q_k. W przypadku, gdy punkty wiodące leżą na płaszczyźnie, krzywe z rodziny $\widehat{S}_{k,q}$ leżą w obszarze między odcinkiem L łączącym punkty P_0 i P_k, a krzywą Béziera Q_k, przy czym $\lim_{q\to\infty} \widehat{S}_{k,q} = L$.

Przykład 5 *Rysunek 5 przedstawia krzywe Béziera Q_k i krzywe $\widehat{S}_{k,q}$ dla $k = 2,3$, $q = 2,3$ wyznaczone przez punkty wiodące $P_0,\ldots,P_k$, gdzie $P_0 = (-1,0)$, $P_1 = (-2,2)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (0,1)$.*



Rysunek 5. Krzywe $\widehat{S}_{k,q}$ z przykładu 5.
Curves $\widehat{S}_{k,q}$ from example 5.

5. PODSUMOWANIE

W pracy skonstruowano pewne rodziny krzywych Béziera. Spliny indukowane przez krzywe z rodzin $S_{2,n}$ i $\widetilde{S}_{k,m}$ znakomicie nadają się do jednostajnej aproksymacji łamanych (w szczególnosci funkcji piłokształtnych i trapezowych) oraz wielokątów. Do wyznaczenia prebiegu wielomianowej krzywej Béziera niepotrzebna jest znajomość współczynników wielomianów które ją określają, gdyż wykorzystuje się do tego celu efektywny algorytm de Casteljau. Pozostale krzywe omawiane w tej pracy mogą znaleźć różne zastosowania w grafice komputerowej.

LITERATURA

Bożek B., Środa P., 2002, *Modyfikacja wielomianowych krzywych Béziera*, Informatyka w Technologii Materiałów, Nr 1, t.2, 34.

Hoschek J., Lasser D., Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung Teubner, Wyd. 2, Stuttgart 1992.

Kiciak P., 2000, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni – zastosowania w grafice komputerowej*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa.

Mitkowski S., 1999, *Nieliniowe obwody elektryczne*, Wydawnictwa Naukowo–Dydaktyczne AGH.

Received: October 2, 2006
Received in a revised form: October 30, 2006
Accepted: October 31, 2006