

## ANALIZA WRAŻLIWOŚCI – METODY I ZASTOSOWANIA

DANUTA SZELIGA

### *SENSITIVITY ANALYSIS – METHODS AND APPLICATIONS*

#### *Abstract*

*Literature review of sensitivity analysis methods and applications is presented in the paper. Sensitivity analysis is applied to the problems of input data and model parameters uncertainty and to model validation. Definition of structures, initial and boundary conditions, and model testing: calibration, determination of independent variables, is discussed. The algorithm of the sensitivity analysis dedicated to the direct problem of the inverse analysis for identification of material parameters was developed in the second part of the work. Sensitivity analysis of the material flow in the ring compression test with respect to the friction coefficient is described as an example.*

## 1. WPROWADZENIE

Analiza wrażliwości jest dziedziną wiedzy badającą w jaki sposób (jakościowy i ilościowy) i w jakim stopniu na zmiany wartości wyjściowych modelu wpływają różne źródła zmian oraz jakie są zależności pomiędzy modelem a jego danymi wejściowymi. Model matematyczny rozwiązania pewnego zagadnienia jest najczęściej układem równań, natomiast występujące w równaniach współczynniki, parametry oraz zmienne (ogólnie: dane wejściowe) charakteryzują rozpatrywany problem. Celem modelowania jest odzwierciedlenie fragmentu rzeczywistości, dlatego dane wejściowe są źródłem niepewności związanych z błędem pomiarów, brakiem informacji bądź tylko częściowym rozumieniem zachodzących zjawisk i

mechanizmów. Wobec tego odpowiedź, jaką daje model, powinna zostać zawsze zweryfikowana. Najczęściej analiza wrażliwości dotyczy badania wpływu niepewności danych wejściowych i parametrów na model. Ma ona jednak szersze zastosowania, pozwala na weryfikację modelu na etapie jego projektowania: definiowania struktur, nakładania na model założeń, specyfikacji modelu, i testowania: kalibracji, wyznaczania zmiennych niezależnych (Saltelli i in. 2001). Analiza wrażliwości ma na celu określenie:

- Czy model prawidłowo odzwierciedla analizowany proces? W przypadku gdy model nie odzwierciedla poprawnie procesu, analiza wrażliwości pokazuje brak koncepcyjnego zrozumienia roli poszczególnych parametrów modelu i pozwala na poprawę jego struktury.

- Które współczynniki modelu mają największy wpływ na zmiany wartości wyjściowych modelu? Analiza wrażliwości pomaga określić, czy parametry modelu są wyznaczone wystarczająco dokładnie aby uzyskać wiarygodne wyniki oraz zminimalizować wpływ błędów pomiarowych na wyniki symulacji numerycznej.
- Które parametry modelu mają niewielki wpływ na wyniki otrzymywane z modelu i mogą być z niego usunięte? Pojęcie "niewielki wpływ" oznacza w tym wypadku niewrażliwość danych wyjściowych w odpowiedzi na zmiany określonych parametrów wejściowych. W takim przypadku analiza wrażliwości pozwala na uproszczenie modelu.
- Czy istnieje pewien podzbiór dla współczynników modelu, dla którego zmiany wartości wyników modelu są największe? Analiza wrażliwości jest pomocna w problemach związanych z poszukiwaniem minimum "globalnego".
- Czy istnieją i jeśli tak, to jakie, współczynniki modelu, które oddziałują nawzajem na siebie? Analiza wrażliwości pozwala na wyodrębnienie grupy takich współczynników. Problem ten jest szczególnie istotny, ponieważ jest związany z wszystkimi wymienionymi wyżej zagadnieniami.

Przedstawione cele analizy wrażliwości realizowane są za pomocą różnych technik, które można podzielić na trzy główne klasy: metody przesiewania, metody lokalne i metody globalne analizy wrażliwości. Nazwa pierwszej grupy pochodzi od sposobu używania algorytmów tej klasy, nazwy dwóch pozostałych związane są ze sposobem badania przez nie parametrów. Odmienny podział metod wrażliwości przedstawiony jest w pracach Kleiber i in. (1997) oraz Sosnowski (2003).

*Metody przesiewania.* Dla modeli kosztownych obliczeniowo i posiadających dużą liczbę parametrów wejściowych, algorytmy przesiewania mogą być użyte do identyfikacji podzbioru parametrów, które mają najbardziej istotny wpływ na zmiany parametrów wyjściowych przy stosunkowo niskim koszcie obliczeniowym. Miara wrażliwości otrzymana z użyciem tych metod ma charakter jakościowy: pozwala na wyznaczenie porządku badanych parametrów, na przykład ze względu na ich istotność, ale nie dostarcza informacji ilościowej o wartościach przyjętej miary dla poszczególnych parametrów.

*Metody lokalne analizy wrażliwości.* Algorytmy tej klasy mają na celu badanie wpływu parametrów na model w niewielkim zakresie ich zmian. Zakres ten dotyczyć może zarówno obszaru fizycznego (własności ośrodka) jak i zmian warunków procesu. Najczęściej są one oparte na obliczeniach pochodnych cząstkowych funkcji wyjściowej ze względu na parametry wejściowe. Jeżeli pochodne obliczane są numerycz-

nie, to zmiany parametrów wejściowych dokonuje się w pewnym niewielkim przedziale wybranym arbitralnie, np.  $\pm 5\%$  przyjętej wartości nominalnej danego parametru, nie kierując się żadną dodatkową wiedzą o badanych parametrach. W przypadku, gdy model jest silnie nieliniowy, obliczenia numeryczne pochodnej mogą być obarczone dużym błędem, a informacja o pochodnej nie może być uogólniana na inne wartości parametru. Jednym z zastosowań jest analiza odwrotna. Metody lokalne są mniej przydatne w porównywaniu wpływu wielu parametrów na wartości wyjściowe modelu.

*Metody globalne analizy wrażliwości.* Zadaniem algorytmów tej klasy jest określenie rozkładu niepewności danych wyjściowych na niepewności parametrów wejściowych poprzez zdefiniowanie rozkładów prawdopodobieństwa pokrywających dziedziny poszczególnych parametrów. Metody te charakteryzują dwie własności: (a) określenie zbioru wartości i kształtu funkcji rozkładu prawdopodobieństwa dla poszczególnych parametrów, (b) wyznaczanie wrażliwości danego parametru realizowane jest przy zmieniających się wartościach pozostałych. Szczególnie druga własność zasługuje na uwagę, ponieważ pozwala na oszacowanie wpływu jednego parametru na model w sytuacji, gdy pozostałe parametry również ulegają zmianom. To podejście różni się zasadniczo od schematu stosowanego w analizie lokalnej, gdzie lokalne perturbacje jednego parametru obliczane są na podstawie pochodnych cząstkowych, przy czym pozostałe parametry są stałe.

Analiza wrażliwości znajduje zastosowanie niemal w każdym zadaniu modelowania, w tym także w metalurgii i inżynierii materiałowej. Przeprowadzony przegląd literatury pokazuje, że analiza wrażliwości w tej dziedzinie nauki dotyczy przede wszystkim zagadnień związanych z optymalizacją kształtu narzędzi w procesach technologicznych (Picart i in. 1998, de Boer i van Keulen 2000, Kima i Huub 2002, Snake i in. 2002, Sosnowski i in. 2002, Sousa i in. 2002, Zhao i in. 2002) lub określeniem wrażliwości modelu numerycznego na parametry procesu (Poldneff i Aroora 1996, Ghouati i Gelin 1998).

## 2. METODY ANALIZY WRAŻLIWOŚCI

### 2.1. Metody przesiewania

Algorytmy tej klasy stanowią wstępną analizę modelu, której celem jest wyznaczenie tych parametrów wejściowych modelu, które w najbardziej istotny sposób wpływają na dane wyjściowe. Podstawowa procedura, zwana *one-at-a-time experiments*, polega na badaniu, w ustalonej kolejności, wpływu zmian poszczególnych parametrów na wyjścia mode-



lu (Daniel 1973). W procedurze definiowany jest proces kontrolny, dla standardowych parametrów wejściowych. Dla każdego parametru wyznaczone są wartości graniczne, w oparciu o dostępną wiedzę. Następnie obliczane są odległości pomiędzy wyjściem modelu otrzymanym na podstawie danych wejściowych zaburzonych i kontrolnych. Odległości te definiują jednocześnie miarę wrażliwości w metodzie przesiewania. Odległości są porównywane i na ich podstawie wyznaczone są parametry wejściowe, na które model jest najbardziej wrażliwy. Metoda *one-at-a-time* nie daje informacji na temat wzajemnego oddziaływania parametrów wejściowych na model. Algorytm zwany *factorial experimentations* (Box i in. 1978) stanowi alternatywę dla tego problemu. W procedurze tej wszystkie parametry są zaburzane jednocześnie, a następnie rozpatrywane są wszystkie możliwe kombinacje wartości parametrów. Wadą tej metody jest wysoki koszt obliczeniowy równy  $l^n$ , gdzie  $n$  jest liczbą parametrów, a  $l$  jest liczbą zaburzeń dla jednego parametru. Modyfikacją tego algorytmu są metody redukujące liczbę wywołań modelu (Box i in. 1978).

## 2.2. Metody globalnej analizy wrażliwości

### 2.2.1. Pojęcie miary wrażliwości

Analiza wrażliwości wymaga wprowadzenia miary, która będzie definiowała wrażliwość. Niech dany będzie model o  $n$  – wymiarowym wektorze danych wejściowych:  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  i wyjściu  $y$ . Poszczególne składowe wektora  $\mathbf{x}$  obarczone są błędami, które albo odzwierciedlają niepełną wiedzę o rozpatrywanym modelu albo wynikają z pomiarów. Dla celów globalnej analizy wrażliwości niech składowe wektora  $\mathbf{x}$  będą zmiennymi losowymi o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wtedy wektor  $\mathbf{x}$  może być rozpatrywany jako pewna realizacja wektora losowego  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  o znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $p(\mathbf{X})$ . Parametr wyjściowy modelu  $y$  również można rozpatrywać jako realizację wektora losowego  $Y$ , i związek pomiędzy danymi wejściowymi i wyjściem dany funkcją  $f(\cdot)$  spełnia zależność:

$$Y = f(\mathbf{X}) \quad (1)$$

Tym samym parametr wyjściowy modelu posiada własną funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Jednym ze sposobów określenia miary wrażliwości jest wprowadzenie momentu wartości oczekiwanej wyjścia modelu  $Y$ :

$$\langle Y^{(\gamma)} \rangle = \int_{\Omega^n} f^{(\gamma)}(\mathbf{X}) p(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (2)$$

gdzie  $\Omega^n$  jest  $n$ -wymiarową przestrzenią parametrów wejściowych modelu.

### 2.2.2. Metody

Do najczęściej wykorzystywanych metod globalnej analizy wrażliwości należą:

- analiza Monte Carlo,
- analiza z wykorzystaniem miary istotności,
- metoda odpowiedzi powierzchni.

*Analiza Monte Carlo.* Metoda oparta jest na wielokrotnym wykonaniu obliczeń w oparciu o model dla wybranych losowo wartości parametrów wejściowych, a następnie użyciu otrzymanych wyników do wyznaczenia niepewności przewidywania modelu oraz udziału poszczególnych parametrów wejściowych w nim. W ogólnym przypadku analiza składa się z pięciu etapów: (a) wybór zakresów i funkcji rozkładu prawdopodobieństwa dla parametrów wejściowych, (b) generowanie punktów losowych z uwzględnieniem założeń z punktu a); (c) wykonanie modelu dla zbioru losowego punktów; (d) analiza poziomu niepewności; (e) analiza wrażliwości.

*Miara istotności.* Metoda stosowana w połączeniu z metodą Monte Carlo. Definiuje pojęcie miary istotności, które określane jest w zależności od realizacji metody, np. jako współczynniki korelacji.

*Metoda odpowiedzi powierzchni.* Procedura oparta na algorytmie aproksymującym rozważany model. Wynikiem procedury jest uproszczony model, który w dalszych rozważaniach jest zastępowany wyznaczoną aproksymacją.

Globalne metody analizy wrażliwości szczegółowo przedstawione są w Saltelli i in. (2001).

## 2.3. Metody lokalnej analizy wrażliwości

Do lokalnych metod analizy wrażliwości zaliczana jest analiza różniczkowa. Lokalne wrażliwości określają nachylenie wartości wyjściowych modelu w przestrzeni parametrów w danym punkcie tej przestrzeni. Informacja taka jest szczególnie przydatna w algorytmach poszukiwania minimum, które wykorzystywane są, między innymi, w problemach odwrotnych.

W lokalnej analizie wrażliwości miara wrażliwości określana jest wprost z definicji różniczki obliczanej dla modelu względem jego parametrów wejściowych.

Modele niestacjonarne opisywane są najczęściej układami równań różniczkowych cząstkowych. Niech dany będzie następujące zagadnienie początkowe:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \mathbf{k}), \quad y(0) = y^0 \quad (3)$$



gdzie  $\mathbf{y}$  jest  $m$ -wymiarowym wektorem zmiennych,  $\mathbf{k}$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem parametrów modelu,  $\mathbf{y}^0$  jest wektorem wartości początkowych.

Wpływ zmiany parametrów wejściowych modelu na jego rozwiązanie można oszacować z rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\mathbf{y}^*(t, \mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}) = \mathbf{y}^*(t, \mathbf{k}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial k_j} \Delta k_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial k_i \partial k_j} \Delta k_i \Delta k_j + \dots \quad (4)$$

Pochodne cząstkowe  $\partial y_i / \partial k_j$  zwane są lokalnymi wrażliwościami pierwszego rzędu, pochodne  $\partial^2 y_i / \partial k_i \partial k_j$  – wrażliwościami drugiego rzędu. Lokalnie wrażliwości pierwszego rzędu tworzą macierz wrażliwości  $\mathbf{S} = \{s_{ij}\} = \{\partial y_i / \partial k_j\}$ .

Dla modeli niestacjonarnych w lokalnej analizie wrażliwości istotna jest nie tylko sama wartość zaburzenia dla danego parametru, ale również czas, w którym parametr ten został zaburzony oraz czas, w którym będzie analizowany model. Niech symulacja modelu rozpoczyna się w czasie 0, parametr jest zaburzany w czasie  $t_1$ , a wpływ tego zaburzenia rozpatrywany jest w czasie  $t_2$ . Wówczas zaburzone wyjście modelu  $\mathbf{y}'$  można aproksymować wykorzystując pierwotne rozwiązanie  $\mathbf{y}$  oraz macierz wrażliwości  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{y}'(t_2) \approx \mathbf{y}(t_1) + \mathbf{S}(t_2, t_1) \Delta \mathbf{k}_{t_1} \quad (5)$$

W tym wypadku macierz wrażliwości  $\mathbf{S}$  zależy od stanu modelu w dwóch chwilach czasu  $t_1$  i  $t_2$ .

### 2.3.1. Metody numeryczne obliczania lokalnych wrażliwości

*Aproksymacja różnicami skończonymi.* Najprostszym sposobem obliczania lokalnych wrażliwości jest niewielkie zaburzenie jednego parametru i ponowne uruchomienie modelu. Stosując aproksymację różnicami skończonymi, współczynniki macierzy wrażliwości obliczane są z zależności:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial k_j} \approx \frac{\mathbf{y}(k_j + \Delta k_j) - \mathbf{y}(k_j)}{\Delta k_j}, \quad j = 1 \dots n \quad (6)$$

Metoda ta zwana jest *brute force method* lub metodą pośrednią. Zaletą tego algorytmu jest brak ingerencji w model, a sama procedura obliczająca wrażliwości stanowi odrębną aplikację. Wadą natomiast jest wysoki koszt obliczeniowy: macierz wrażliwości wymaga uruchomienia  $n+1$  razy modelu wykorzystując równanie (6), przy stosowaniu schematu różnicowego symetrycznego  $2n$  uruchomień modelu. Dokładność obliczenia pochodnych zależy od wartości parametru  $\Delta k_j$ . Zbyt duża wartość, w przypadku, gdy model jest silnie nieliniowy, prowadzić może do nie

spełnienia warunku o lokalnej liniowości; zbyt mała wartość może powodować różnice pomiędzy rozwiązaniem dla parametru zaburzonego i nominalnego dające duże błędy zaokrąglenia. W większości przypadków dobór długości parametru  $\Delta k_j$  mieści się w granicach  $\pm 1\%$  nominalnej wartości danego parametru.

*Metody bezpośrednie.* W wyniku zróżniczkowania równania (3) względem parametrów  $k_j$  otrzymywany jest układ różniczkowych równań wrażliwości:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial k_j} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial k_j} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial k_j} \quad (7)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{J} \mathbf{S} + \mathbf{F} \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{J} = \{\partial f_i / \partial y_l\}$  jest pochodną prawej strony równania (3) ze względu na zmienne modelu (zwana Jakobianem),  $\mathbf{F} = \{\partial f_i / \partial k_j\}$  jest macierzą pochodnych ze względu na parametry modelu. Warunek początkowy dla równania (7) stanowi wektor zerowy.

Metody bezpośrednie oparte są na rozwiązaniu równania (7). Rozwiązanie numeryczne równania (7) wymaga znajomości elementów macierzy  $\mathbf{J}$  i  $\mathbf{F}$  w każdym kroku algorytmu rozwiązania równania (7). Do wyznaczenia wartości tych macierzy potrzebne są aktualne wartości modelu, zatem potrzebne jest równoczesne lub wcześniejsze rozwiązanie problemu (3). W pierwszych procedurach realizujących metodę bezpośrednią, równania (3) i (7) rozwiązywane były jednocześnie, ale niezależnie, a następnie rozwiązanie (3) stanowiło dane wejściowe dla równania (7). Koszt obliczeniowy tego algorytmu jest stosunkowo wysoki. Dunker (1981, 1984) pokazał, że równania (3) i (7) mają ten sam Jakobian, zatem jednym algorytmem rozwiązującym układy równań różniczkowych, z zachowaniem kroku i rzędu aproksymacji, można otrzymać rozwiązania obydwu równań. Metoda wykorzystująca tę obserwację została nazwana *decoupled direct method*.

*Metody oparte na funkcji Greena.* Różniczkując równanie (3) względem wektora wartości początkowych  $\mathbf{y}^0$ , otrzymywane jest następujące równanie:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(t, t_1) = \mathbf{J}(t) \mathbf{K}(t, t_1) \quad (9)$$

gdzie  $t_1$  i  $t$  jest, odpowiednio, czasem zaburzenia i czasem obserwacji, a  $\mathbf{K}$  jest macierzą początkowych wrażliwości postaci:

$$\mathbf{K}(t, t_1) = \left\{ \frac{\partial c_i(t)}{\partial c_j^0(t_1)} \right\}, \quad \mathbf{K}(t_1, t_1) = \mathbf{I}, \quad t \geq t_1 \quad (10)$$



Równanie (7) jest liniowo niejednorodnym układem równań różniczkowych, zatem można zastosować metodę, która w pierwszej kolejności rozwiązuje jednorodną część – równanie (9), a następnie oblicza rozwiązanie postaci:

$$\mathbf{S}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K}(t_2, s) \mathbf{F}(s) ds \quad (11)$$

W równaniu (11)  $\mathbf{K}$  jest funkcją Greena, a metoda oparta na rozwiązaniu równania (11) zwana jest metodą funkcji Greena. Macierz  $\mathbf{K}$  można aproksymować pewną macierzą eksponentyjalną postaci (Kramer i in. 1981):

$$\mathbf{K}(t + \Delta t, t) = \exp \left[ \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{J}(s) ds \right] \quad (12)$$

### 3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI DLA METODY ODWROTNEJ IDENTYFIKACJI WŁASNOŚCI MATERIAŁOWYCH

Zagadnienie identyfikacji parametrów równań opisujących własności materiałowe może być zdefiniowane jako problem odwrotny, gdzie zadaniem bezpośrednim jest proces odkształcania sztywno-plastycznego ciała (Szeliga i Pietrzyk 2002).

#### 3.1. Problem bezpośredni

##### 3.1.1. Mechaniczne równania stanu równowagi układu

Niech dane będzie ciało ograniczone obszarem  $\Omega \subset R^3$  z brzegiem  $\Gamma = \partial\Omega$ . W stanie równowagi, dla każdego punktu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  zachodzą równania równowagi:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13a)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13b)$$

gdzie  $\sigma_{ij}$  – składowa tensora naprężeń Cauchy'ego,

$$\sigma_{ji,j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \text{ pochodna składowej tensora naprężeń}$$

względem współrzędnej  $x_j$ ,  $\rho$  – gęstość ciała,  $b_i$  – siły wewnętrzne,  $u_i$  – składowe wektora przemieszczenia  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\ddot{u}_i$  – druga pochodna  $i$ -tej składowej wektora  $\mathbf{u}$  po czasie. W dalszych rozważaniach pomijany jest wpływ sił bezwładności i sił ciężkości (człon  $b_i$  i  $\rho \ddot{u}_i$  równania (13a)).

Warunki brzegowe definiowane są jako:

$$\tau_i = \sigma_{ji} n_j = \bar{\tau}_i \quad \text{dla } x_i \in \Gamma_t \quad (14a)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{dla } x_i \in \Gamma_u \quad (14b)$$

gdzie  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  jest siłą przyłożoną na brzegu działającą na ciało (w jednostkach siła/jednostkę miary na brzegu  $\Gamma_t$ ), wektor  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  jest wektorem normalnym do brzegu  $\Gamma$ ,  $\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3)$  jest zadaną funkcją,  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$  jest zadanym wektorem przemieszczenia na brzegu  $\Gamma_u$ , oraz zachodzą zależności:  $\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma$  i  $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$ .

Dla ciał odkształcanych plastycznie, dla których odkształcenia sprężyste mogą być pominięte, tensor odkształceń definiowany jest jako:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (15)$$

Ponadto na materiał nakładany jest warunek nieściśliwości równoznaczny z zerowymi wartościami odkształcenia objętościowego:

$$\varepsilon_{ii}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (16)$$

*Równanie konstytutywne.* Dla ciał odkształcanych plastycznie definiowane jest pojęcie potencjału plastycznego (jest to funkcja nieliniowa). Tensor naprężenia można zapisać jako sumę aksjatora  $\mathbf{A}_\sigma$ , opisującego hydrostatyczny stan naprężenia i decydującego o odkształceniu objętościowym, i dewiatora  $\mathbf{s}$ , opisującego czyste ścinanie i decydującego o odkształceniu postaciowym:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}_\sigma + \mathbf{s} \\ \mathbf{A}_\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \boldsymbol{\delta}_{ij}, \quad \mathbf{s} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \boldsymbol{\delta}_{ij} \quad (17)$$

Wielkość  $p = -\frac{1}{3} \sigma_{kk}$  jest ciśnieniem hydrostatycznym wewnątrz odkształcanego ciała.

Zależność między dewiatorem tensora naprężenia oraz wektorem prędkości odkształcenia jest przyjmowana zgodnie z prawem Levy-Misesa:

$$\mathbf{s} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}_i}{\dot{\varepsilon}_i} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (18)$$

gdzie:  $\bar{\sigma}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}$  – intensywność naprężenia,

$\dot{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  – intensywność prędkości odkształcenia.

$\bar{\sigma}_i$  jest najczęściej postaci:



$$\bar{\sigma}_i = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, \mathbf{p}) \quad (19)$$

przy czym  $\varepsilon$  – odkształcenie,  $\dot{\varepsilon}$  – prędkość odkształcenia,  $T$  – temperatura,  $\mathbf{p}$  – wektor parametrów równania (18).

Równania równowagi (13a) i (13b) wraz z warunkami (14a), (14b) i (16) oraz prawem konstytutywnym plastyczności (18) stanowią sformułowanie zadania ciała odkształcanego plastycznie z zachowaniem warunku nieściśliwości.

*Model tarcia.* W przyjętym rozwiązaniu tarcie na powierzchni styku materiału z narzędziem zostało opisane modelem Chena-Kobayashi'ego, w którym naprężenie tarcia jest wyrażone jako (Chen i Kobayashi, 1978):

$$\tau = m\tau_{\max} \left[ \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{|\dot{\mathbf{u}}_s|}{\alpha} \right) \right] \quad (20)$$

gdzie  $m$  – czynnik tarcia,  $\tau_{\max}$  – wytrzymałość materiału na ścinanie,  $\dot{\mathbf{u}}_s$  – prędkość poślizgu materiału względem narzędzia,  $\alpha$  – stała, której wielkość jest dobierana tak, aby powyższy wzór przyjmował klasyczną formę prawa Treski  $\tau = m\tau_{\max}$  dla większych wartości prędkości  $\dot{\mathbf{u}}_s$ .

### 3.2.1. Model termomechaniczny

W czasie plastycznego odkształcania ciała zachodzą zjawiska cieplne: generacja ciepła związana z odkształcaniem i tarcie na powierzchni styku materiał – narzędzie oraz wymiana ciepła pomiędzy materiałem i narzędziem i pomiędzy materiałem a otoczeniem.

Równania opisujące przepływ ciepła w materiale ograniczonym obszarem  $\Omega \subset R^3$  z brzegiem  $\Gamma = \partial\Omega$ , z uwzględnieniem warunku brzegowego (konwekcji) i warunku początkowego, mają postać:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{w} &= \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ k(\mathbf{n} \cdot \nabla)T &= \beta(T_o - T) + \dot{q} \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie:  $t$  – czas,  $T = T(\mathbf{x}, t)$  – szukany rozkład temperatury,  $T_o$  – temperatura otoczenia,  $T_0$  – początkowy rozkład temperatury ( $t = 0$ ),  $k$  – przewodność cieplna,  $\beta$  – współczynnik konwekcji między rozpatrywanym ciałem a otoczeniem,  $\rho$  – gęstość materiału,  $c_p$  – pojemność cieplna materiału,  $\dot{w}$  – gęstość energii wewnętrznej źródła ciepła,  $\dot{q}$  – strumień ciepła zadany na brzegu  $\Gamma$ .

### 3.2.3. Rozwiązanie

Słabą formę dla rozpatrywanego zagadnienia mechanicznego (13) otrzymuje się stosując zasadę pracy wirtualnej z mnożnikiem Lagrange'a. W wyniku dyskretyzacji zadania wariacyjnego metodą elementów skończonych otrzymywany jest układ równań, dla której poszukiwanymi wartościami są wektor prędkości odkształcenia i mnożnik Lagrange'a ( $\dot{\mathbf{u}}, \lambda$ ). Do rozwiązania wykorzystuje się algorytm linearyzacji Newtona-Raphsona. Znając informację o nowym polu prędkości, możliwe jest wykonanie kroku po czasie i tym samym zdefiniowanie problemu odkształcania ciała jako zadania quasi-stacjonarnego.

Postać dyskretną zasady pracy wirtualnej w każdym kroku czasowym można zapisać jako:

$$W^t(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^t, \dot{\mathbf{u}}^t, T^{t-\Delta t}) = 0 \quad (22)$$

gdzie  $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{p}, m)$  jest wektorem parametrów równania opisującym naprężenie uplastyczniające (19) i czynnika tarcia (20),  $\mathbf{x}^t$  jest wektorem współrzędnych węzłów siatki,  $\dot{\mathbf{u}}^t$  – wektorem prędkości,  $T^{t-\Delta t}$  – temperaturą.

Zagadnienie cieplne również rozwiązywane jest za pomocą metody elementów skończonych, której wynikiem jest postać dyskretna:

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{H}\mathbf{T}^t = \mathbf{P}(\dot{\mathbf{u}}^t) \quad (23)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą pojemności cieplnej,  $\mathbf{H}$  – macierzą przewodności,  $\mathbf{P}(\dot{\mathbf{u}}^t)$  – wektorem sił.

W algorytmie rozwiązania w każdym kroku czasowym rozwiązywane jest oddzielnie zagadnienie mechaniczne i cieplne, a następnie wyniki są przekazywane między rozwiązaniami. W konsekwencji własności materiału wyznaczone są z uwzględnieniem temperatury w poprzedniej iteracji, a obliczone w zadaniu mechanicznym naprężenia i odkształcenia wykorzystywane są w modelu cieplnym do określenia ilości ciepła generowanego w wyniku pracy odkształcenia i pracy tarcia. Szczegóły takiego rozwiązania dla modelu mechanicznego i termomechanicznego przedstawione są w Kobayashi i in. (1989) oraz Leonard i in. (1999).

### 3.3. Problem odwrotny

Rozwiązanie termomechanicznych równań (22) i (23) dla odkształcanego materiału dostarcza informacji o rozkładzie, w czasie i przestrzeni, lokalnych wartości naprężeń, odkształceń i temperatury, oraz globalnych wartościach, takich jak siła  $F^c$  lub kształt ciała po odkształceniu  $G^c$ :



$$N^c(\xi, \dot{u}, x) = (F^c(\xi, \dot{u}, x), G^c(\xi, \dot{u}, x)) \quad (24)$$

Wielkości te mogą być bezpośrednio porównane z wielkościami otrzymanymi z doświadczenia  $N^e$ . Odchylenie pomiędzy danymi doświadczalnymi a obliczonymi zdefiniowane jest poprzez funkcję celu  $\Phi$  wykorzystującą klasyczną metodę najmniejszych kwadratów. Zatem problem optymalizacji ma postać:

$$\min_{\xi \in \Xi} \Phi(\xi) \quad (25)$$

$$\Phi(\xi, N^c(\xi), N^e) = \sum_{i=1}^n \frac{(N_i^c(\xi) - N_i^e)^2}{\beta_i}, \quad \beta_i = (N_i^e)^2$$

gdzie  $\xi$  – wektor parametrów materiałowych i tarcia (równania (19) i (20)),  $\Xi$  – przestrzeń dopuszczalnych wartości parametrów  $\xi$ ,  $N^c$  – dane wyjściowe obliczone na podstawie modelu opisanego równaniami (22) i (23),  $N^e$  – dane doświadczalne,  $n$  – liczba punktów pomiarowych.

Do rozwiązania problemu (25) wykorzystano metodę Gaussa-Newtona:

$$\xi^k = \xi^{k-1} - [J_\xi(\xi^{k-1})] \frac{d\Phi}{d\xi}(\xi^{k-1}) \quad (26)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\xi} &= 2 \sum_{i=1}^n \beta_i (N_i^c(\xi) - N_i^e) \frac{dN_i^c}{d\xi} \\ J_\xi &\approx 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{dN_i^c}{d\xi} \left[ \frac{dN_i^c}{d\xi} \right]^T \end{aligned} \quad (27)$$

$J_\xi$  jest Jakobianem macierzy  $\frac{d\Phi}{d\xi}$  ze względu na  $\xi$ , pomijając pochodne drugiego rzędu.

Zbieżność algorytmu (26) zależy od wpływu wektora  $\xi$  na dane wyjściowe  $N$  oraz od macierzy wrażliwości  $S = \frac{dF}{d\xi}$ . Macierz  $S$  oszacowana może być ko-

rzystając z jednej z metod lokalnej analizy wrażliwości opisanych w poprzednim rozdziale.

### 3.4. Analiza wrażliwości

Jedną z metod wyznaczenia elementów macierzy wrażliwości  $S$  jest wykorzystanie metody aproksymacji pierwszego rzędu. Dla każdej składowej wektora  $\xi_i$  ( $i = 1 \dots m$ , gdzie  $m$  – wymiar wektora  $\xi$ ) pochodna ma postać:

$$S_{ij} = \frac{dN_i^c(\xi)}{d\xi_j} = \frac{N_i^c(\xi + \Delta\xi_j e_j) - N_i^c(\xi)}{\Delta\xi_j} + O(\Delta\xi_j) \quad (28)$$

gdzie  $e = \{e_i\}$ ,  $i = 1 \dots m$ , baza kanoniczna przestrzeni zawierającej  $\Xi$ .

Zalety i wady powyższego rozwiązania przedstawiono w rozdziale opisującym lokalne metody analizy wrażliwości.

Innym rozwiązaniem dla obliczenia macierzy wrażliwości  $S$  jest algorytm półanalityczny, który z jednej strony pozwala na ominięcie problemów związanych z numerycznym wyznaczaniem gradientu, a z drugiej strony nie nakłada dodatkowych kosztów związanych z analitycznym różniczkowaniem równań opisujących zachowanie materiału podczas odkształcania bądź modeli tarcia. Algorytm wyznaczania macierzy  $S$  opiera się bezpośrednio na zróżniczkowaniu dyskretnego zadania bezpośredniego opisanego równaniem (22). Macierz  $S$  można zapisać w postaci:

$$S = \frac{dN}{d\xi} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{N(\xi^\theta, x^\theta, \dot{u}^\theta) - N(\xi, x^t, \dot{u}^t)}{\theta \xi} \quad (29)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \xi^\theta &= \xi + \theta \xi \\ x^\theta &= x^t + \frac{dx^t}{d\xi} \theta \xi \end{aligned} \quad (30)$$

Wektor prędkości  $\dot{u}^\theta$  zdefiniowany jest jako:

$$\dot{u}^\theta = \dot{u}^t + \frac{d\dot{u}^t}{d\xi} \theta \xi$$

przy czym  $\frac{d\dot{u}^t}{d\xi}$  obliczane jest dzięki zróżniczkowaniu zagadnienia bezpośredniego (22):

$$\frac{dW^t}{d\xi} = \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\dot{u}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}^t}{d\xi} = 0 \quad (31)$$

Po przekształceniach:

$$\frac{d\dot{u}^t}{d\xi} = - \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{u}} \right)^{-1} \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\dot{u}} = -\mathbf{H}^{-1}(\dot{u}^t) \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\dot{u}} \quad (32)$$

Odwrotność hesjanu  $\mathbf{H}^{-1}(\dot{u}^t)$  jest obliczana podczas rozwiązywania zadania (22) metodą Newtona-Raphsona.

Pochodne cząstkowe  $W$  względem wektora  $\xi$  dla stałej wartości wektora  $\dot{u}^t$  w równaniu (32) mogą być obliczane analitycznie bądź numerycznie. Ze względu na nieliniowy charakter równań opisujących wła-



ności materiału, zastosowano schemat różnicowy. Wszystkie wielkości, oprócz prędkości, są jednocześnie zaburzane, i obliczany jest iloraz różnicowy:

$$\left. \frac{dW}{d\xi} \right|_{\dot{u}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{W(\xi^\theta, \mathbf{x}^\theta, \dot{\mathbf{u}}^t, T^\theta) - W(\xi, \mathbf{x}^t, \dot{\mathbf{u}}^t, T^{t-\Delta t})}{\theta \xi} \quad (33)$$

gdzie  $T^\theta = T^{t-\Delta t} + \frac{dT^{t-\Delta t}}{d\xi} \theta \xi$ , i z równania (4):

$$\left. \frac{dW}{d\xi} \right|_{\dot{u}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{W(\xi^\theta, \mathbf{x}^\theta, \dot{\mathbf{u}}^t, T^\theta)}{\theta \xi} \quad (34)$$

Czynnik  $\frac{dT^{t-\Delta t}}{d\xi}$  obliczany jest na podstawie ostatniego kroku rozwiązania (równanie (35) zamieszczone poniżej).

Model odwrotny, podobnie jak model bezpośredni, wymaga rozwiązania sprzężonego zadania termomechanicznego. W pierwszej kolejności obliczona jest

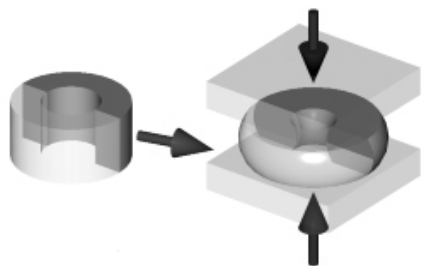
wielkość  $\frac{d\dot{\mathbf{u}}^t}{d\xi}$ , a następnie wielkość  $\frac{dT}{d\xi}$  na podstawie równania (23) z wykorzystaniem półanalitycznego schematu:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{H} \mathbf{T}^t &= \mathbf{P}(\dot{\mathbf{u}}^t) \\ \mathbf{C} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{T}^t}{d\xi} \right) + \mathbf{H} \frac{d\mathbf{T}^t}{d\xi} &= \frac{\mathbf{P}(\dot{\mathbf{u}}^\theta) - \mathbf{P}(\dot{\mathbf{u}}^t)}{\theta \xi} \end{aligned} \quad (35)$$

#### 4. WYNIKI OBLICZEŃ

Analizę wrażliwości przeprowadzono dla próby plastometrycznej – spęcznienia pierścieni (rysunek 1). Doświadczenie to jest dedykowane wyznaczeniu współczynnika tarcia (Avitzur, 1968).

Celem analizy było zbadanie wrażliwości stosunku wymiarów początkowych pierścieni  $D_0:d_0:h_0$ , gdzie  $D_0$  – początkowa średnica zewnętrzna,  $d_0$  – początkowa średnica wewnętrzna,  $h_0$  – początkowa wysokość pierścienia, na płynięcie materiału. Do obliczeń za-



Rys. 1. Schemat spęcznienia pierścieni.

stosowano metodę opartą na schemacie różnicowym. Miarę wrażliwości zdefiniowano jako:

$$\varphi(m, D_0, d_0, h_0) = \frac{m}{V_m(D_0, d_0, h_0)} \frac{dV_m(D_0, d_0, h_0)}{dm} \quad (36)$$

gdzie:

$$\frac{dV_m(D_0, d_0, h_0)}{dm} = \frac{V(m, D_0, d_0, h_0) - V(m + \Delta m, D_0, d_0, h_0)}{\Delta m}, \quad (37)$$

$m$  jest współczynnikiem tarcia, a  $V(m, D_0, d_0, h_0)$  jest objętością wewnętrznego otworu pierścienia po spęcznieniu:

$$V(m, D_0, d_0, h_0) = \pi \int_0^{h_e} f^2(z) dz \quad (38)$$

gdzie  $h_e$  – wysokość pierścienia po spęcznieniu,  $f(z)$  – funkcja opisująca kształt wewnętrznej średnicy pierścienia po spęcznieniu. Proces odkształcenia przeprowadzono dla pierścienia o wymiarach początkowych  $D_0, d_0$  i  $h_0$ .

Obliczenia wykonano dla różnych stosunków  $D_0:d_0:h_0$ , których wymiary bezwzględne umieszczono w tabelcy 1.

Tabela 1. Wymiary pierścieni użytych w obliczeniach.

$D_0$ , mm	$d_0$ , mm	$h_0$ , mm	$D_0:d_0:h_0$
12	8	4	6:4:2
12	6	2	6:3:1
12	6	5	6:3:2.5
12	6	6	6:3:3
12	4	6	6:2:3
12	4	4	6:2:2
12	4	2	6:2:1

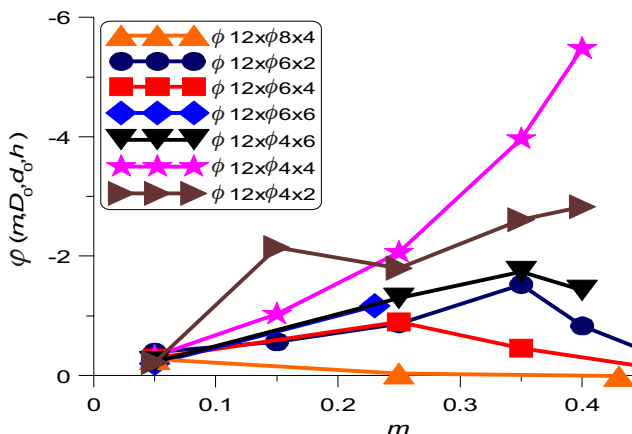
Dodatkowo przeprowadzono obliczenia dla różnych gęstości siatek, przy czym nie stwierdzono wpływu wielkości elementu siatki na wynik obliczeń (dla dostatecznie gęstych siatek).

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 2. Wraz ze wzrostem stosunku średnicy wewnętrznej do zewnętrznej zmniejsza się wrażliwość na współczynnik tarcia. Przy stosunku  $D_0:d_0$  równym 6:4 nie obserwuje się właściwie wrażliwości na tarcie, szczególnie dla większych wartości parametru tarcia. Tarcie ma największy wpływ na płynięcie materiału dla pierścieni o małej średnicy wewnętrznej ( $d_0$ ) i małej wysokości ( $h_0$ ), jednak przy większych współczynnikach tarcia dla pierścieni tych rozmiarów średnica wewnętrzna w trakcie odkształcania osiąga wartości bliskie zero (niemożliwe jest już swobodne płynięcie materiału do wewnątrz) i tym samym wrażliwość obniża się (wykres dla pierścienia o wymiarach  $D_0 = 12$  mm,  $d_0 = 4$





mm,  $h_0 = 2$  mm). Dla małych współczynników tarcia mogą wystąpić trudności z interpretacją wyników doświadczenia niezależnie od wymiarów początkowych pierścienia.



Rys. 2. Wyniki obliczeń wrażliwości ze względu na wymiary początkowe pierścieni.

## 5. PODSUMOWANIE

Praca podzielona została na trzy części. W pierwszej zamieszczono klasyfikację metod analizy wrażliwości oraz pokazano obszary stosowania poszczególnych z nich. W drugiej pokazano praktyczne wykorzystanie lokalnych metod analizy wrażliwości dla zagadnienia odwrotnej identyfikacji parametrów równań własności materiałowych i tarcia. Opracowany został algorytm obliczający wrażliwości, który będzie miał zastosowanie w procedurach optymalizacji stosowanych w metodzie odwrotnej oraz w badaniu poprawności samego modelu symulującego odkształcanie ciała. W ostatniej części pracy przeprowadzono obliczenia wrażliwości próby spęczania pierścienia na współczynnik tarcia ze względu na początkowe wymiary próbek. Gradient aproksymowano schematem różnicowym. Analiza pokazała, że średnica wewnętrzna pierścienia jest najbardziej wrażliwym wymiarem na współczynnik tarcia, przy czym istotny jest też stosunek średnicy wewnętrznej do zewnętrznej. Natomiast dla małych wartości tarcia, niezależnie od wszystkich wymiarów pierścienia, interpretacja wyników może być trudna.

Uwaga końcowa. Praca wykonana w ramach badań własnych, nr uczelniany 10.10.110.641.

## LITERATURA

- Avitzur B., 1968, *Metal Forming: Processes and Analysis*, McGraw Hill.  
 Boer de, H., Keulen van, F., 2000, Refined semianalytical design sensitivities, *Int. J. Solids Structures*, 37, 6961-6980.

- Box, G.E.P., Hunter, W.G., Hunter, J.S., 1978, *Statistics for Experimenters. An Introduction to Design, Data Analysis and Model Building*, Wiley.  
 Chen, C.C., Kobayashi, S., 1978, Rigid - Plastic Finite - Element Analysis of Ring Compression, Application of Numerical Methods to Forming Processes, *ASME, ADM*, 28, 163-174.  
 Daniel, C., 1973, One-at-a-time plans, *J. Am. Statist. Assoc.*, 68, 353-360.  
 Dunker, A.M., 1981, Efficient calculation of sensitivity coefficients for complex atmospheric models, *Atmos. Environ.*, 15, 1155-1161.  
 Dunker, A.M., 1984, The decoupled direct method for calculating sensitivity coefficients in chemical kinetics, *J. Chem. Phys.*, 81, 2385-2393.  
 Ghouati, O., Gelin, J.C., 1998, Identification of material parameters directly from metal form-ing processes, *J. Mat. Proc. Techn.*, 80-81, 560-564.  
 Kima, S.H., Huub, H., 2002, Design sensitivity analysis of sheet metal forming processes with a direct differentiation method, *J. Mat. Proc. Techn.*, 130-131, 504-510.  
 Kleiber, M., Antunez, H., Hien, T.D., Kowalczyk, P., 1997, *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*, J. Wiley.  
 Kobayashi, S., Oh, S., Altan, T., 1989, *Metal Forming and the Finite-Element Method*, Oxford University Press, New York.  
 Kramer, M.A., Calo, J.M., Rabitz, H., 1981, An improved computational method for sensitivity analysis: Green's function method with "AIM", *Appl. Math. Modelling*, 5, 432-441.  
 Lenard, J.G., Pietrzyk, M., Cser, L., 1999, *Mathematical and Physical Simulation of the Properties of Hot Rolled Products*, Elsevier, Amsterdam.  
 Picart, P., Ghouati, O., Gelin, J.C., 1998, Optimization of metal forming process parameters with damage minimization, *J. Mat. Proc. Techn.*, 80-81, 597-601.  
 Poldneff, M.J., Arora, J.S., 1996, Design Sensitivity Analysis in Dynamic Thermoelastoplasticity with Implicit Integration, *Int. J. Solids Structures*, 33, 577-594.  
 Saltelli, A., Chan, K., Scott, E.M., 2001, *Sensitivity Analysis*, Wiley.  
 Snape, G., Clift, S., Bramley, A., 2002, Parametric sensitivity analyses for FEA of hot steel forging, *J. Mat. Proc. Techn.*, 125-126, 353-360.  
 Sosnowski, W., 2003, *Numeryczna symulacja, analiza wrażliwości i optymalizacja nieliniowych procesów deformacji konstrukcji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz.  
 Sosnowski, W., Marczevska, I., Marczewski, A., 2002, Sensitivity based optimization of sheet metal forming tools, *J. Mat. Proc. Techn.*, 124, 319-328.  
 Sousa, L.C., Castro, C.F., Antonio, C.A.C., Santos, A.D., 2002, Inverse methods in design of industrial forging processes, *J. Mat. Proc. Techn.*, 128, 266-273.  
 Szeliga, D., Pietrzyk, M., 2002, Identification of Rheological and Tribological Parameters, In: *Metal Forming Science and Practice, A State-of-the-art Volume in Honour of Professor J.A. Schey's 80th Birthday*, Elsevier, Amsterdam, 227-258.  
 Zhao, X., Zhao, G., Wang, G., Wang, T., 2002, Preform die shape design for uniformity of deformation in forging based on preform sensitivity analysis, *J. Mat. Proc. Techn.*, 128, 25-32.

Artykuł otrzymano do druku 28 grudnia 2005 r.

