

ZASTOSOWANIE EWOLUCYJNEJ OPTYMALIZACJI KSZTAŁTU W PROCESIE KUCIA

TADEUSZ BURCZYŃSKI, WAĆLAW KUŚ

APPLICATIONS OF EVOLUTIONARY SHAPE OPTIMIZATION IN FORGING

Abstract

This paper is devoted to an application of evolutionary algorithms into optimal shape design of a preform. The presented method allows finding an initial shape of the preform that leads to a final production with the desired geometry. The two stage forging problem are also considered. The optimal shape of the anvils in the first stage is searched. The objective function depends on the plastic strains in the material in the second stage of forging.

1. WSTĘP

W artykule przedstawiono ewolucyjną metodę pozwalającą na dobór kształtu materiału wsadowego lub kowadeł w taki sposób, aby w wyniku kucia swobodnego otrzymać odkuwkę o oczekiwanym kształcie lub cechującą się najmniejszymi niejednorodnościami odkształceń plastycznych wewnątrz ciała podczas procesu kucia. Metodę sformułowano w postaci zagadnienia optymalizacji, które rozwiązano stosując algorytm ewolucyjny bazujący na zjawiskach ewolucji biologicznej. Zastosowanie algorytmów ewolucyjnych pozwala z dużym prawdopodobieństwem na znalezienie optymalnego rozwiązania globalnego lub zbliżenie się do niego. Podczas działania algorytmu ewolucyjnego nie jest konieczna znajomość gradientu funkcji przystosowania (funkcji celu).

Do rozwiązania bezpośredniego zadania początkowo-brzegowego wykorzystano metodę elementów skończonych MES (Zienkiewicz i Taylor 2000).

Zagadnienie poszukiwania optymalnego kształtu materiału wsadowego w celu otrzymaniażądanego kształtu po procesie kucia swobodnego było rozwiązywane z zastosowaniem analizy wrażliwości i klasycznych metod optymalizacji (Badrinarayanan 1997, Zabaras i in. 2000, Kusiak 1996). Sekwencyjne oraz rozproszone algorytmy ewolucyjne były stosowane w wielu zagadnieniach optymalizacji układów mechanicznych (Burczyński i Kuś 2001, Burczyński i Kuś 2003c, Burczyński i in. 2004). Optymalizacja procesów kucia rozważana była w artykułach: Chung i Hwang, 1998, Fourment i Vieilledent 2000, António i Douardo 2002, Zhao i in. 2002, Burczyński i Kuś 2003a, Burczyński i Kuś 2003b, Burczyński i Kuś 2004a.

T. Burczyński^{1,2}, Waćław Kuś¹

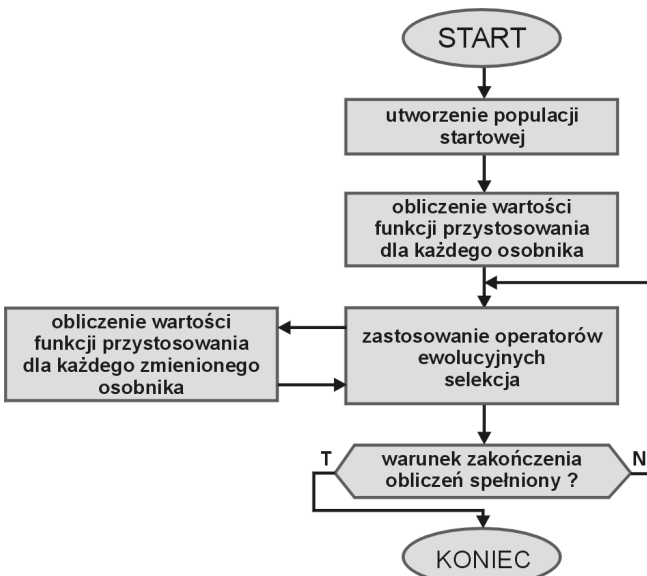
¹Katedra Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechnika Śląska, ul. Konarskiego 18a, 41-100 Gliwice

²Instytut Modelowania Komputerowego, Zakład Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

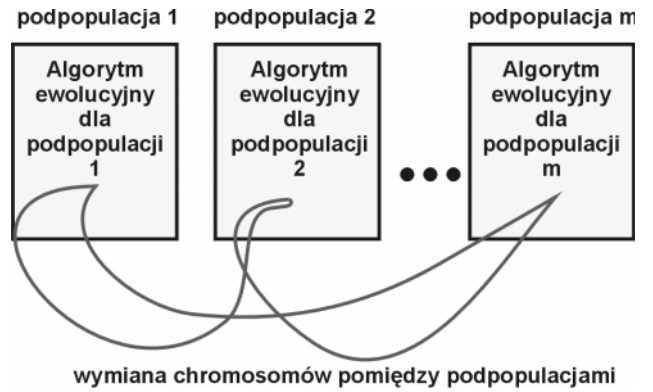
2. OPTIMALIZACJA EWOLUCYJNA

Algorytmy ewolucyjne (Michalewicz 1996, Arabas 2001) są algorytmami optymalizacji globalnej, opartymi na biologicznym zjawisku ewolucji gatunków. Największą ich zaletą jest duże prawdopodobieństwo znalezienia się w pobliżu optimum globalnego funkcji wielomodalnej, natomiast największą wadą jest pracochłonność obliczeń (liczba obliczeń wartości funkcji przystosowania). Algorytmy ewolucyjne w sposób stochastyczny przeszukują przestrzeń dopuszczalnych rozwiązań w poszukiwaniu optimum globalnego. Operują one na osobnikach, które składają się z chromosomów. Zazwyczaj przyjmuje się że osobnik zbudowany jest z pojedynczego chromosomu. Każdy chromosom zawiera pewną liczbę genów. Informacja o wartościach zmiennych projektowych zadania optymalizacji zakodowana jest w genach chromosomu. Informacja o przystosowaniu osobnika do środowiska określa funkcja przystosowania, która musi być obliczana dla wszystkich osobników. Ograniczenia na zmienność genów osobnika jak również związki pomiędzy zawartością chromosomu, a wartością funkcji przystosowania nazywamy środowiskiem. Algorytmy ewolucyjne działają na populacji osobników, tak więc w każdej chwili pracy algorytmu mamy do czynienia z wieloma rozwiązaniami zadania optymalizacji. Za zmianę genów osobników odpowiadają operatory genetyczne, które w większości powstały na bazie analogicznych zjawisk zachodzących podczas biologicznej ewolucji np. operator mutacji czy krzyżowania analogiczne do mutacji części genów osobnika czy też krzyżowania się dwu osobników.

Schemat blokowy algorytmu ewolucyjnego przed-



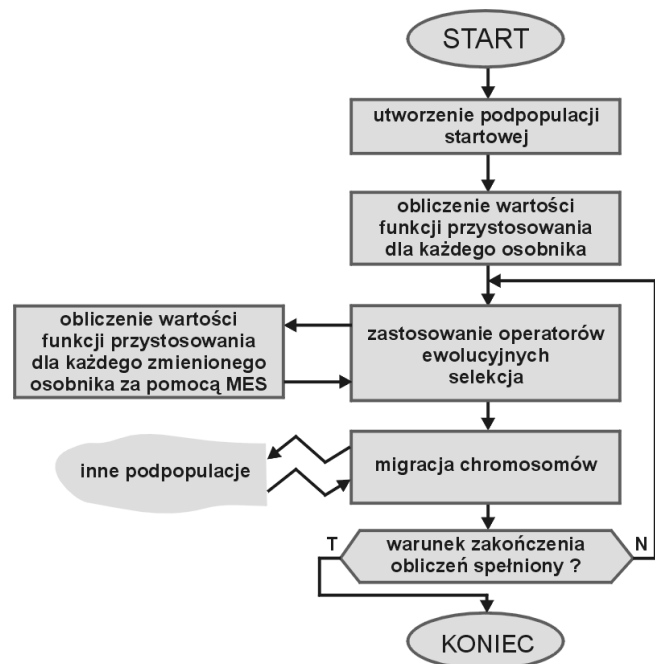
Rysunek 1. Schemat blokowy algorytmu ewolucyjnego.
Figure 1. Evolutionary algorithm flowchart.



Rysunek 2. Rozproszony algorytm ewolucyjny.
Figure 2. Distributed evolutionary algorithm.

stawiono na rysunku 1. W pierwszej kolejności utworzona zostaje populacja startowa zawierająca zazwyczaj osobniki generowane w sposób losowy. Następnie dla każdego osobnika obliczana jest wartość funkcji przystosowania. W kolejnym kroku stosowane są operatory ewolucyjne zmieniające wartości genów osobników, dla każdego zmienionego osobnika ponownie obliczana jest wartość funkcji przystosowania. Po selekcji otrzymujemy populację potomną. Wykonujemy powyższe działania iteracyjnie, do momentu spełnienia warunku zakończenia obliczeń. Warunek zakończenia obliczeń jest zazwyczaj sformułowany jako maksymalna liczba iteracji bądź oczekiwana wartość funkcji przystosowania.

W celu skrócenia czasu działania algorytmu ewolucyjnego zastosowano rozproszone algorytmy ewolucyjne (Cantu-Paz 1998, Aleander 2000). Proces



Rysunek 3. Schemat blokowy rozproszonego algorytmu ewolucyjnego, jedna podpopulacja.
Figure 3. Distributed evolutionary algorithm flowchart, one sub-population.



ewolucji przebiega szybciej, jeśli ewoluują odosobnione podpopulacje o małej liczbie osobników wymienianych pomiędzy sobą. W algorytmie tym populację osobników dzieli się na kilka lub kilkanaście podpopulacji. Każda podpopulacja ewoluuje oddzielnie i tylko co pewien czas następuje faza migracji podczas której, część osobników wymieniana jest pomiędzy podpopulacjami.

Na rysunku 2 przedstawiono schematycznie rozproszony algorytm ewolucyjny z m podpopulacjami. Rysunek 3 przedstawia schemat blokowy dla pojedynczej podpopulacji.

3. OBLICZANIE FUNKCJI PRZYSTOSOWANIA ORAZ KODOWANIE GEOMETRII CIAŁA

Funkcja przystosowania pełni rolę funkcji celu. W niniejszym artykule minimalizowano dwa typy funkcji przystosowania: związaną z kształtem ciała po kuciu oraz związaną z odkształceniami plastycznymi w ciele.

Pierwsza z nich jest miarą różnicy pomiędzy kształtem oczekiwanym, a kształtem otrzymanym w wyniku analizy numerycznej procesu kucia swobodnego. Rysunek 4 przedstawia przykładowy kształt uzyskany w wyniku analizy numerycznej oraz kształt pożądany. Wartość funkcji przystosowania F może zostać obliczona korzystając ze wzoru:

$$F(\mathbf{x}) = \int_y \Delta r(y) dy \quad (1)$$

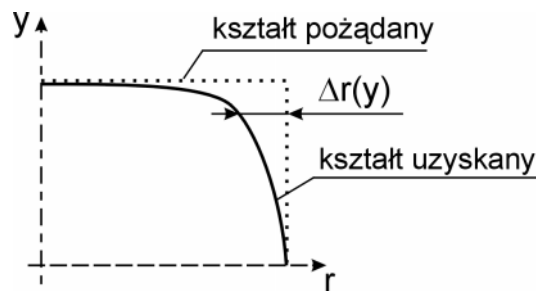
gdzie \mathbf{x} jest chromosomem, w którym zakodowany jest kształt poszukiwanego materiału wsadowego, Δr jest różnicą współrzędnej promieniowej między kształtem pożądanym a uzyskanym (rysunek 4). Optymalna wartość funkcji przystosowania jest znana i jest równa zero.

Druga funkcja była wyznaczana na podstawie odkształceń plastycznych we wszystkich krokach symulacji procesu kucia. Funkcja przystosowania w tym przypadku jest miarą różnicy pomiędzy odkształceniami plastycznymi ε_p , w poszczególnych punktach ciała o obszarze Ω , a wartością średnią ε_{sr} :

$$\min F(\mathbf{x}) = \int_t \int_{\Omega} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{sr}} d\Omega dt \quad (2)$$

Do obliczeń funkcji przystosowania symulowano numerycznie zadanie kucia o osiowej symetrii rozwiązane za pomocą MES (Zienkiewicz i Taylor 2000).

Proces kucia zamodelowano stosując dwa ciała: odkształcalne – modelujące materiał wsadowy oraz ciało sztywne modelujące młot. Na ciało odkształcalne nałożone były warunki brzegowe związane z sy-



Rysunek 4. Kształt pożądany oraz uzyskany w wyniku analizy numerycznej.

Figure 4. Desired and obtained shape using numerical simulation.

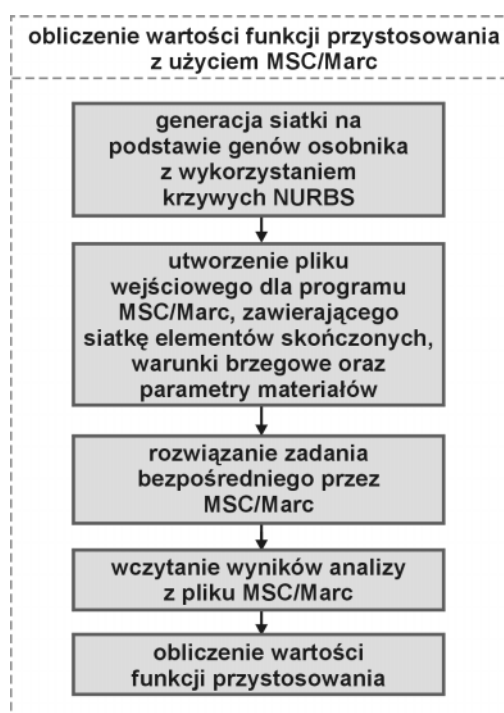
metrią zadania. Ciało sztywne miało zadaną stałą prędkość. Pomiędzy ciałem odkształcalnym oraz sztywnym zachodziło zjawisko kontaktu wraz z tarcieniem wg modelu Columba. Przyjęto, że proces zachodzi w warunkach izotermicznych. Materiał wsadowy modelowany był jako sztywnoplastyczny opisany równaniem konstytutywnym:

$$\sigma = A(\varepsilon_0 + \varepsilon)^m + B\dot{\varepsilon}^n \quad (3)$$

gdzie jest naprężeniem, ε odkształceniem, $\dot{\varepsilon}$ prędkością odkształcenia, ε_0 odkształceniem wstępnym, A , B , n , m są współczynnikami materiałowymi.

Zadanie rozwiązano w sposób iteracyjny z uwzględnieniem dużych odkształceń oraz generację siatki w sposób adaptacyjny. Analizę przeprowadzono z wykorzystaniem programu MSC.Marc. Rysunek 5 przedstawia algorytm obliczeń.

Kształt materiału wsadowego lub kowadeł modelowany jest za pomocą krzywych NURBS (Non-Uni-



Rysunek 5. Algorytm obliczania wartości funkcji przystosowania.

Figure 5. Fitness function evaluation flowchart.



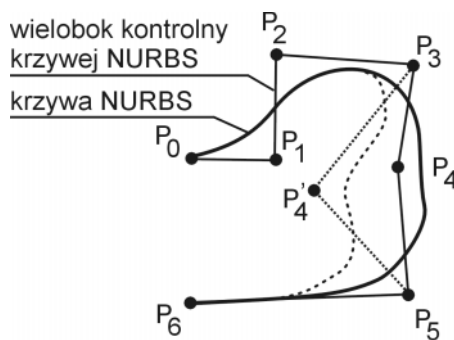
form Rational B-Spline) (Piegl i Tiller 1997). Obszar zajmowany przez materiał wsadowy dyskretyzowany jest za pomocą elementów skończonych. Następnie tworzony jest plik wejściowy programu MSC.Marc zawierający warunki brzegowe, parametry materiałowe oraz siatkę elementów skończonych. Kolejny krok polega na rozwiązaniu zadania bezpośredniego przez MSC.Marc. Wyniki analizy są wczytywane do programu optymalizacji. Na podstawie przemieszczeń lub odkształceń otrzymanych w wyniku analizy numerycznej obliczana jest wartość funkcji przystosowania stosując wzór (1) lub (2).

W artykule stosowano dwa typy zadań: z optymalizacją geometrii materiału wsadowego oraz z optymalizacją kształtu młotów.

Geometria materiału wsadowego lub kowadła tworzona jest na podstawie genów które sterują krzywą NURBS. Rysunek 6. przedstawia przykładową krzywą NURBS wraz z wielobokiem kontrolnym. Współrzędne węzłów kontrolnych tworzących wielobok kontrolny determinują kształt krzywej. Współrzędne te są określane przez wartości genów chromosomu. Rysunek 6 pokazuje również wpływ zmiany współrzędnych jednego z punktów kontrolnych (P4) na kształt krzywej. Kolejne współrzędne punktów wieloboku kontrolnego odpowiadają genom w chromosomie, dla krzywej przedstawionej na rysunku 6 chromosom miałby postać:

$$ch_i = [P_{0x}, P_{0y}, \dots, P_{6x}, P_{6y}] \quad (4)$$

gdzie: P_{jx} – współrzędna punktu kontrolnego j w kierunku x , P_{jy} – współrzędna punktu kontrolnego j w kierunku y .



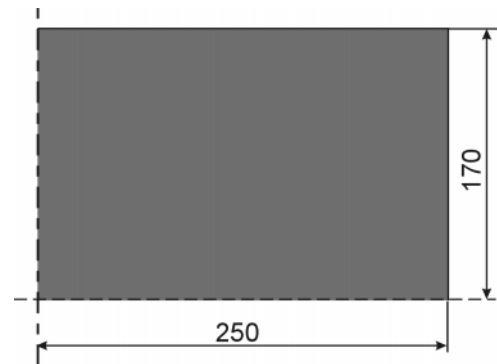
Rysunek 6. Przykładowa krzywa NURBS.
Figure 6. Sample NURBS curve.

4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

4.1 Optymalizacja kształtu wstępniaka

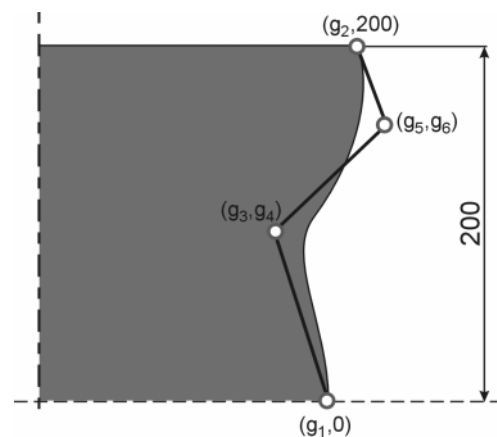
Rozwiązano zagadnienie ewolucyjnej optymalizacji kształtu osiowosymetrycznego materiału wsadowego, tak aby jej kształt po kuciu swobodnym był jak

najbardziej zbliżony do walca. Wymiary przekroju odkuwki pokazano na rysunku 7. Materiał wsadowy modelowano za pomocą równania konstytutywnego (3) stosując parametry materiałowe dla aluminium, zawarte w programie MSC.Marc dla temperatury 350°C: $A = 26.478$, $B = 24.943$, $m = 0.1629$, $n = 3.4898$. Współczynnik tarcia pomiędzy młotem a materiałem wsadowym przyjęto 0.5. Krok czasu wynosił 0.002 s, a liczba kroków wynosiła 200. Prędkość młota wynosiła 75 mm/s. Zastosowano funkcję przystosowania określoną wzorem (1).



Rysunek 7. Pożyczany kształt odkuwki.
Figure 7. Desired forging shape.

Na rysunku 8 przedstawiono kształt materiału wsadowego, który modelowany był z użyciem krzywej NURBS o 4 węzłach kontrolnych. Współrzędne węzłów zostały zdefiniowane za pomocą 6 genów chromosomu (g_1 - g_6). Na wartości genów nałożono ograniczenia przedstawione w tabelicy 1. Podczas optymalizacji zastosowano sekwencyjny algorytm ewolucyjny wykorzystujący mutację równomierną, mutację z rozkładem Gaussa oraz krzyżowanie proste i arytmetyczne. Jako metodę selekcji wybrano selekcję rangową. Parametry algorytmu ewolucyjnego zastosowanego do obliczeń przedstawiono w tabelicy 2. Zastosowano funkcję przystosowania opisaną równa-



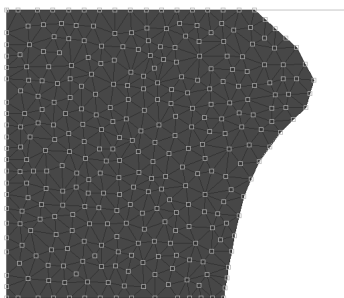
Rysunek 8. Geometria materiału wsadowego.
Figure 8. Preform geometry.

Tablica 1. Ograniczenia na zmienność wartości genów.
Table 1. Constraints on genes values.

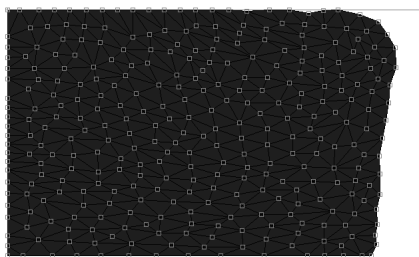
gen	minimum [mm]	maksimum [mm]
g1	50	250
g2	50	250
g3	50	300
g4	10	100
g5	50	300
g6	110	190

niem (1). Kryterium zatrzymania obliczeń była maksymalna liczba iteracji.

Algorytm ewolucyjny wykonał 840 generacji. Najlepszy rezultat osiągnięto po 638 generacjach. W następnych generacjach wartość funkcji przystosowania pozostała praktycznie stała. Do 638 generacji wykonano 15362 obliczeń zadania bezpośredniego symulującego kucie swobodne za pomocą MES. W czasie całego procesu optymalizacji wykonano 20210 obliczeń zadań bezpośrednich. Obliczenia przeprowadzono na komputerze Compaq EVO 6000 z procesorem Pentium Xeon 1.4 GHz. Rozwiązanie pojedynczego zadania bezpośredniego trwało około 15 sekund. Optymalny kształt materiału wsadowego pokazano na rysunku 9. Końcowy kształt odkuwki uzyskany podczas kucia swobodnego materiału wsadowego o geometrii przedstawionej na rysunku 9, przedstawiono na rysunku 10. Rysunek 11 przedstawia zmianę wartości funkcji przy-



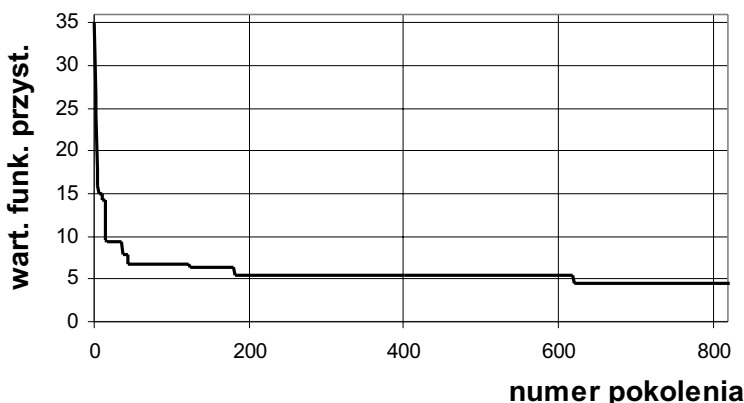
Rysunek 9. Kształt materiału wsadowego.
Figure 9. Shape of the preform.



Rysunek 10. Kształt uzyskany po kuciu swobodnym.
Figure 10. Shape after forging.

Tablica 2. Parametry algorytmu ewolucyjnego.
Table 2. Evolutionary algorithm parameters.

liczba genów	6
liczba chromosomów	25
prawdopodobieństwo mutacji równomiernej	25%
prawdopodobieństwo mutacji z rozkładem Gaussa	62.5%
prawdopodobieństwo krzyżowania prostego	6.25%
prawdopodobieństwo krzyżowania arytmetycznego	6.25%



Rysunek 11. Zmiana wartości funkcji przystosowania w kolejnych generacjach algorytmu.
Figure 11. Fitness function variation in evolutionary algorithm generations.

stosowania w kolejnych generacjach algorytmu ewolucyjnego. Wartości genów rozwiązania optymalnego zawarte są w tablicy 3.

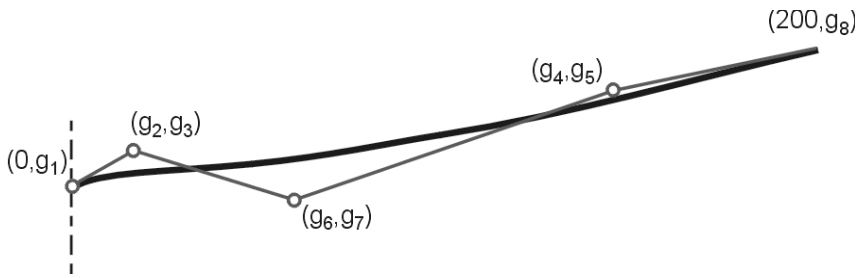
Tablica 3. Wartości genów dla najlepszego rozwiązania.
Table 3. Genes values for the best solution.

gen	wartość [mm]
g1	162.75
g2	171.86
g3	160.56
g4	42.51
g5	213.27
g6	166.71

4.2. Optymalizacja kształtu kowadeł

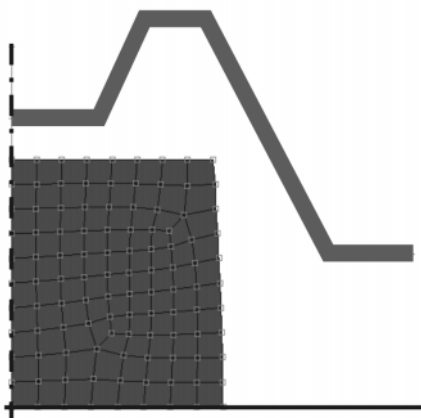
Przeprowadzono optymalizację kształtu kowadeł w procesie kucia dwuetapowego materiału osiowosymetrycznego. W pierwszym etapie zastosowano kowadła kształtowe, a w drugim matrycę. Zastosowano kryteria opisane wzorem (2). Na rysunku 12 przedstawiono kowadło kształtowe oraz krzywą NURBS opisującą jego krzywiznę. Podczas optymalizacji dobierano 8 parametrów krzywej NURBS (g1, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8). Poszczególne geny chromosomów zawierały wartościach parametrów krzywej NURBS.



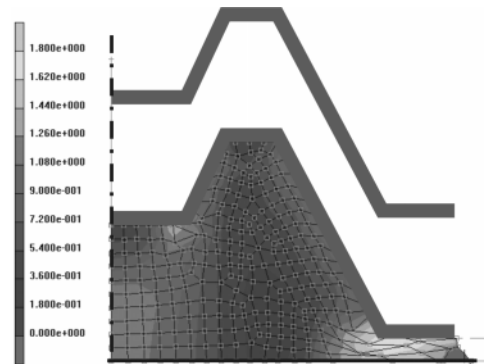


Rysunek 12. Opis kształtu kowadła z użyciem krzywej NURBS.
Figure 12. Anvils shape description using NURBS curve.

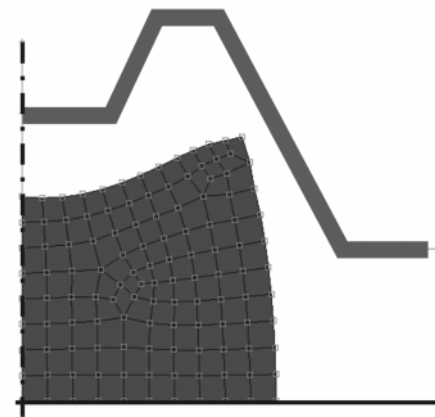
Przyjęto materiał dla którego prawo konstytutywne opisane jest równaniem (3) o parametrach: $A = 26.478$, $B = 24.943$, $m = 0.1629$, $n = 3.4898$. Współczynnik tarcia przyjęto 0.3. Model dyskretyzowano elementami czworokątnymi. W każdym kroku obliczeń generowano siatkę elementów skończonych. Zastosowano funkcję przystosowania określoną wzorem (2). Do optymalizacji wykorzystano rozproszony algorytm ewolucyjny operujący na dwóch podpopulacjach. Każda z podpopulacji zawierała 10 chromosomów. W algorytmie ewolucyjnym użyto krzyżowanie proste, mutację z rozkładem Gaussa oraz selekcję rangową. Rysunek 13 przedstawia kształt uzyskany po pierwszym etapie kucia, gdy zastosowano kowadło płaskie do spęczenia materiału wsadowego. Rozkład odkształceń plastycznych w odkuwce po drugim etapie kucia przedstawiono na rysunku 14. Kształt uzyskany po pierwszym etapie kucia, gdy zastosowano kowadło kształtowe o optymalnym kształcie do spęczenia materiału wsadowego pokazano na rysunku 15. Rysunek 16 przedstawia rozkład odkształceń plastycznych w odkuwce po drugim etapie kucia. Wartość funkcji przystosowania (2) dla optymalnego rozwiązania była o 36% mniejsza, niż przypadku, w którym zastosowano kowadła płaskie w pierwszym etapie kucia. Kryterium zatrzymania obliczeń była maksymalna liczba iteracji.



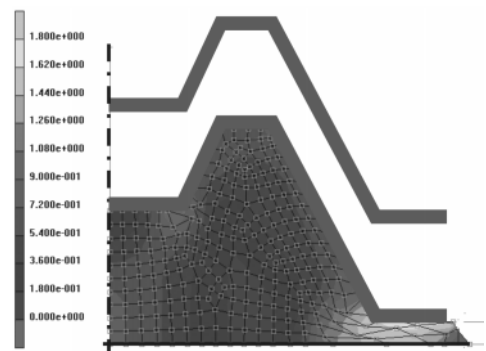
Rysunek 13. Kształt materiału po pierwszym etapie kucia z wykorzystaniem kowadeł płaskich.
Figure 13. Shape of material after first-stage forging using flat anvils.



Rysunek 14. Końcowy kształt materiału po kuciu matrycowym – w pierwszym etapie użyto kowadeł płaskich.
Figure 14. Final shape of the material after second stage forming – flat anvils used in first-stage)



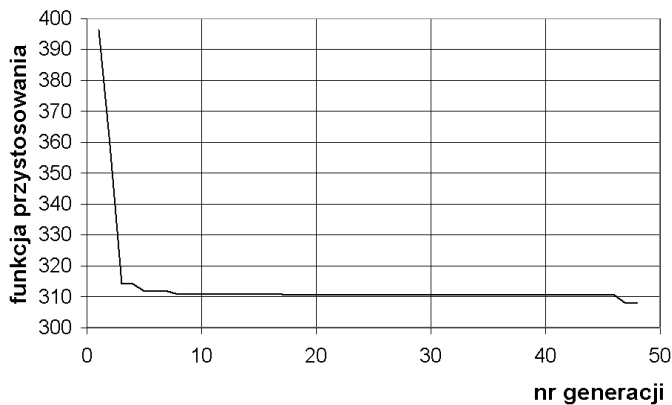
Rysunek 15. Kształt materiału po pierwszym etapie kucia z wykorzystaniem kowadeł optymalnych.
Figure 15. Shape of material after first-stage forging using anvils with optimal shape.



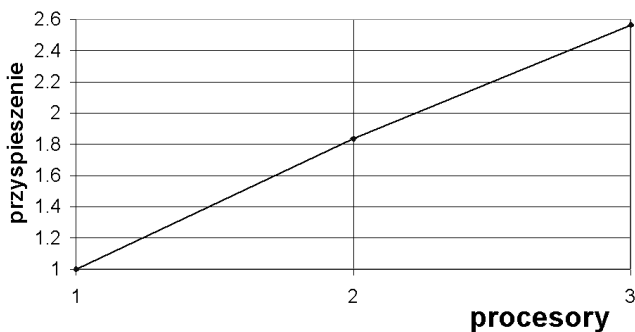
Rysunek 16. Końcowy kształt materiału plastycznych po kuciu matrycowym – w pierwszym etapie użyto kowadeł optymalnych.
Figure 16. Final shape of the material after second stage forming – optimal anvils used in first-stage.

Zmianę wartości funkcji przystosowania w czasie optymalizacji dla najlepszych chromosomów w danym pokoleniu przedstawiono na rysunku 17.

Dla powyższego zadania optymalizacji przeprowadzono testy pozwalające określić przyspieszenie obliczeń w wyniku zastosowania różnej liczby



Rysunek 17. Wykres funkcji przystosowania.
Figure 17. Fitness function graph.



Rysunek 18. Wykres przyspieszenia w funkcji liczby procesorów.
Figure 18. Graph presenting speedup in function of number of processors.

procesorów. Przyspieszenie s zdefiniowano jako:

$$s = \frac{t_1}{t_n} \quad (5)$$

gdzie t_1 jest czasem obliczeń z użyciem 1 procesora, a t_n jest czasem obliczeń z użyciem n procesorów. Do obliczeń wykorzystano komputer dwuprocessorowy Pentium Xeon 1.4 GHz (wariant z 1 i 2 procesorami) oraz dodatkowo w wariancie z trzema procesorami komputer AMD Athlon XP 2.5 GHz. Wykres przyspieszenia w funkcji liczby procesorów przedstawia rysunek 18.

6. WNIOSKI

Przedstawiona metoda oparta na ewolucyjnych obliczeniach z wykorzystaniem MES pozwala na optymalny dobór kształtu materiału wsadowego lub kształtu kowadła w procesie kucia. Zastosowanie algorytmów ewolucyjnych zwiększa prawdopodobieństwo znalezienia rozwiązania w pobliżu optimum globalnego bez konieczności obliczania gradientu funkcji celu. Okupione jest to jednak znacznym czasem obliczeń. Obliczenia ewolucyjne można znacznie przyspieszyć stosując rozproszone algorytmy ewolucyjne oraz klastry obliczeniowe lub komputery wieloprocessorowe, w wyniku użycia 3 procesorów osiągnięto przyspieszenie rzędu 2.6 razy.

UWAGA KOŃCOWA

Praca finansowana ze środków na naukę w latach 2005-2008 jako projekt badawczy.

LITERATURA

- Aleander J.T., 2000, An Indexed Bibliography of Distributed Genetic Algorithms, University of Vaasa, *Report 94-1-PARA*, Vaasa, Finland.
- António C.A.C., Douardo N.M., 2002, Metal-forming optimization by inverse evolutionary search, *Journal of Material Processing Technology*, 121, str. 403-413.
- Arabas J., 2001, *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, WNT.
- Badrinarayanan S., 1997, Preform and die design problems in metalforming, *praca doktorska*, Cornell University.
- Burczyński T., Kuś W., 2001, Zastosowanie algorytmów ewolucyjnych w optymalnym kształtowaniu ciał sprężysto-plastycznych, *Informatyka w Technologii Metali*, vol.3-4, tom 1, Kraków.
- Burczyński T., Kuś W., 2003a, Obliczenia ewolucyjne w optymalnym kształtowaniu materiału wsadowego do kucia swobodnego *Mat. KomPlasTech 2003*, Wisła, str. 53-60.
- Burczyński T., Kuś W., 2003b, Optymalne kształtowanie materiału wsadowego do kucia swobodnego, *Mat. Fizyczne i Matematyczne Modelowanie Procesów Obróbki Plastycznej FIMM 2003*, Warszawa.
- Burczyński T., Kuś W., 2003c, Optymalne projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych z wykorzystaniem sekwencyjnych i rozproszonych algorytmów ewolucyjnych rozdz. 3 w *Informatyka w technologii metali*, ed. A. Piela, F. Grosman, J. Kusiak, M.Pietrzyk, Gliwice, str.108-142
- Burczyński T., Kuś W., Długosz A., Orantek P., 2004, Optimization and identification using distributed evolutionary algorithms, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 17, str. 337-344.
- Burczyński T., Kuś W., 2004, Rozproszone algorytmy ewolucyjne w kuciu dwuetapowym matrycowym, *Mat. KOMPLASTECH 2004*, Zakopane.
- Cantu-Paz E., 1998, A Survey of Parallel Genetic Algorithms, *Calculateurs Paralleles, Reseaux et Systems Repartis*. Vol. 10, No. 2, pp. 141-171, Paris.
- Chung J.S., Hwang S.M., 1998, Application of a genetic algorithm to process optimal design in non-isothermal metal forming, *Journal of Material Processing Technology*, 80-81, str. 136-143.
- Fourment L., Vieilledent D., 2000, Shape optimization for metal forging problems: determination of an objective function for flow defects, *Proc. ECCOMAS 2000*, Barcelona.
- Kusiak J., 1996, Zastosowanie technik optymalizacyjnych w symulacji procesów plastycznej przeróbki metali, *rozprawa habilitacyjna*, AGH, Kraków
- Michalewicz Z., 1996, *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*. Warszawa, WNT
- Piegl L., Tiller W., 1997, *The NURBS book*, Springer.
- Zabaras N., Bao Y., Srikanth A., Frazier W. G., 2000, A continuum Lagrangian sensitivity analysis for metal forming processes with applications to die design problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48 str. 679 -720
- Zhao X., Zhao G., Wang G., Wang T., 2002, Preform die shape design for uniformity of deformation in forging based on preform sensitivity analysis, *Journal of Material Processing Technology*, 128, str. 25-32.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., 2000, *The Finite Element Method, Solid Mechanics*, vol 2, 5th ed., Butterworth, Oxford.

Artykuł otrzymano w 2005 r.

