

## ZASTOSOWANIE RÓWNOLEGLYCH KODÓW HP ADAPTACJI DO EFEKTYWNEGO DOKŁADNEGO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW DWU I TRÓJWYMIAROWYCH

MACIEJ PASZYŃSKI, LESZEK DEMKOWICZ

### *APPLICATION OF PARALLEL HP ADAPTIVE CODES FOR EFFICIENT ACCURATE SOLVING OF 2D AND 3D PROBLEMS*

#### *Abstract*

*In many engineering problems the finite element method domain consists in areas described by different material constants. In such a case, there are singularities of the numerical solution at interfaces of different materials. To minimize the error of the solution, the finite element mesh must be refined. This paper presents a description of a 2D and 3D parallel fully automatic hp-adaptive finite element codes. The codes refine in a fully automatic mode initial finite element mesh in order to minimize error of the numerical solution. The hp adaptive strategy delivers fastest convergence of the size of the finite element mesh with respect to the error of the solution of the problem under consideration, within all known adaptive strategies. The parallelization of the hp adaptive codes allows use the strategy to solve large engineering problems in reasonable time.*

## 1. WPROWADZENIE

Próby modelowania bazujące na tradycyjnej Metodzie Elementów Skończonych (MES) napotykają na szereg ograniczeń metodologicznych oraz technicznych. W trakcie symulacji pojawiają się często lokalne osobliwości rozwiązania numerycznego. W przypadku problemów eliptycznych błąd propaguje się na cały obszar obliczeniowy i rozwiązanie numeryczne zawiera wówczas duży błąd globalny. W celu poprawienia jakości rozwiązania konieczna jest adaptacja siatki. Dodatkowym poważnym ograniczeniem jest czasochłonność obliczeniowa, spowodowana dużym zagęszczeniem siatki elementów skończonych, wyma-

ganym dla poprawienia jakości rozwiązania numerycznego w miejscach występowania osobliwości.

Metoda *hp* adaptacji polega na równoczesnym zastosowaniu elementów skończonych o lokalnie zmieniającym się rozmiarze  $h$ , oraz rzędzie aproksymacji wielomianowej  $p$ . Uzasadnienie stosowania elementów *hp* jest następujące. Podczas rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych metodą elementów skończonych, w modelowanym obszarze występują osobliwości, związane np. z nieciągłością parametrów modelu (stałych materiałowych, warunków brzegowych) czy kształtem modelowanego obszaru. Często modelowany obszar podzielony jest na podobszary opisane z pomocą różnych stałych materiałowych róż-

niących się niekiedy o kilka rzędów wielkości. Osobliwości te mogą mieć postać pojedynczych punktów lub być zlokalizowane wokół granicy kilku obszarów opisanych różnymi parametrami fizycznymi. W tych obszarach występują duże gradienty funkcji rozwiązania, co prowadzi do dużych błędów numerycznych. Dla poprawy jakości rozwiązania i minimalizacji kosztów obliczeniowych, konieczne jest lokalne zagęszczenie siatki elementów w obszarze osobliwości, oraz stopniowe zwiększanie rzędu aproksymacji na elementach skończonych w pobliżu osobliwości. Kody automatycznej *hp* adaptacji (Demkowicz, 2002a; Demkowicz i in., 2002b; Rachowicz i in., 2004; Kurtz, 2005; Paszyński i in., 2005a; Paszyński i in., 2006) wykonują te zadania w pełni automatycznie, analizując błąd rozwiązania MES na aktualnej siatce elementów skończonych, i podejmując decyzję o rodzaju zagęszczenia siatki i zwiększaniu rzędu aproksymacji. Kod automatycznej adaptacji *hp* potrafi automatycznie podjąć decyzję, które elementy skończone należy podzielić (zagęścić siatkę MES), oraz na których elementach należy zwiększyć rząd aproksymacji. Umiejętność podejmowania decyzji o lokalnych adaptacjach siatki elementów minimalizuje koszt obliczeń numerycznych. Wystarczy bowiem dokonać adaptacji siatki MES w obszarach występowania osobliwości, o dużym błędzie rozwiązania numerycznego. Miejsca te stanowią zwykle pewną niewielką część modelowanego obszaru. Unikamy w ten sposób dużego kosztu obliczeniowego występującego przy globalnych adaptacjach siatki, takich jak globalne zagęszczenie siatki MES (podzielenie każdego elementu skończonego) lub globalne zwiększenie rzędu aproksymacji (zwiększenie rzędu aproksymacji na każdym elemencie). Z pomocą strategii automatycznej *hp* adaptacji możliwe jest uzyskanie rozwiązania numerycznego z dużą dokładnością na optymalnej pod względem ilości stopni swobody siatce MES. Rozwiązano za jej pomocą problemy z dokładnością sięgającą 0.0000000001% błędu względnego w normie energetycznej (z dokładnością 10 cyfr po przecinku) (Paszyński i in., 2005c). Dzięki zastosowaniu wersji równoległej kodu, możliwe jest wykonanie szeregu obliczeń dla dużych problemów z dobrą dokładnością w krótkim czasie.

Metoda elementów skończonych w konwencjonalnym podejściu jest dobrze udokumentowana i powszechnie wykorzystywana do obliczania rozkładu ciepła, rozkładu fal elektromagnetycznych i akustycznych, oraz do modelowania zjawisk zachodzących w odkształcanym materiale. Metody adaptacyjne były z powodzeniem używane do obliczeń rozkładu ciepła, rozkładu fal elektromagnetycznych i akustycznych (Demkowicz, 2002a; Demkowicz i in., 2002b; Rachowicz i in., 2004) oraz do obliczania odkształceń mate-

riałów (Babuška, 1981; Chang i Demkowicz, 1995; Remakle i in., 2000).

Schemat automatycznej adaptacji *hp* jest niezależny od modelowanego problemu, bo szacowanie błędu MES i decyzja o optymalnym lokalnym zagęszczeniu siatki i zwiększeniu rzędu aproksymacji wielomianowej podejmowana jest na podstawie porównania rozwiązań na dwóch siatkach elementów: aktualnej siatce rzadkiej, oraz na siatce zagęszczonej powstałej poprzez podzielenie każdego elementu skończonego i jednorodnemu zwiększeniu rzędu aproksymacji.

Zrównoleglenie kodów *hp* adaptacji jest zadaniem trudnym. Jedyne znane nam kody równoległe wspierające *hp* adaptacje to kod opracowany przez Joe Flacherty w kontekście Discontinuous Galerkin Methods (DG) (Remacle i in., 2005), oraz kod opracowany przez Abani Patra (Patra, 1995), który ma swoje korzenie w pracach Leszka Demkowicza. Żaden z tych kodów nie wspiera automatycznej *hp* adaptacji.

Równoległa wersja kodów automatycznej *hp* adaptacji (Paszyński i in., 2005a; Paszyński i in., 2006) powstała poprzez zrównoleglenie wersji sekwencyjnych dwu i trójwymiarowych (Demkowicz, 2002a; Demkowicz i in., 2002b; Rachowicz i in., 2004; Kurtz, 2005). Wersja równoległa pozwala na efektywne zredukowanie czasu obliczeń. Zrównoleglenie sekwencyjnych wersji dwu i trójwymiarowych kodów automatycznej *hp* adaptacji objęło wszystkie etapy algorytmu:

1. Obszar obliczeniowy dzielony jest na podobszary przypisane do poszczególnych procesorów. Innymi słowy implementacja równoległa opiera się na paradygmacie dekompozycji obszaru obliczeniowego.
2. Obciążenia poszczególnych procesorów związane z kosztem obliczeń nad poszczególnymi podobszarami równoważone są w każdej iteracji procesu automatycznej *hp* adaptacji. Biblioteka ZOLTAN (Devine i in., 1999) używana jest do podejmowania decyzji o równomiernym podziale obszaru obliczeniowego na podobszary w celu zrównoważenia obciążeń numerycznych. Na początku każdego kroku iteracji, po skonstruowaniu nowej dokładniejszej siatki obliczeniowej, pewne elementy skończone wysyłane są do innych podobszarów.
3. Rozważany problem rozwiązywany jest z pomocą równoległego solwera wielofrontalnego (Geng, 1997).
4. Algorytmy podejmowania decyzji o optymalnych zagęszczeniach siatki i optymalnym zwiększaniu rzędu aproksymacji wielomianowej pracują w pełni równoległe nad poszczególnymi obszarami obliczeniowymi. Na tym etapie konieczna jest komunikacja pomiędzy procesorami w celu zapewnienia globalnej integralności siatki.

Kod równoległy zaimplementowany został w języku Fortran 90 w oparciu o paradygmat wymiany komunikatów (Message Passing) z zastosowaniem standardu Message Passing Interface (MPI), a decyzje o optymalnych podziałach siatki obliczeniowej oparto na bibliotece ZOLTAN (Devine i in., 1999).

Przykłady numeryczne obejmują

1. Dwuwymiarowy problem wzorcowy obliczenia rozkładu ciepła w obszarze w kształcie litery L, opracowany przez Ivo Babuškę (Babuška i in., 1986a; Babuška i in., 1986b)
2. Dwuwymiarowy problem obliczenia anizotropowego rozkładu ciepła we wnętrzu baterii ze stałymi materiałowymi różniącymi się o 6 rzędów wielkości, pochodzący z Sandia National Laboratories w Los Alamos, USA
3. Trójwymiarowy problem wzorcowy Fichery, obliczenia rozkładu ciepła w kostce z usuniętą 1/8 częścią kostki
4. Trójwymiarowy problem obliczenia rozkładu fal elektromagnetycznych w warstwach górotworu z anteny nadawczej umieszczonej w otworze odwiertu, mający zastosowanie w identyfikacji lokalizacji złóż ropy naftowej.

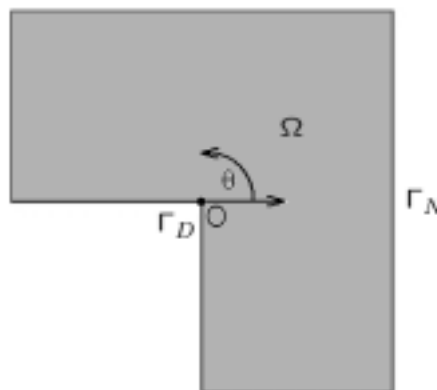
Strategie adaptacji siatki

W celu zminimalizowania błędu rozwiązania numerycznego w obszarach występowania osobliwości konieczne jest zastosowanie adaptacji siatki MES. Strategie adaptacji siatki sklasyfikować można następująco:

1. Jednorodna  $h$  adaptacja, w której wszystkie elementy skończone na całej siatce obliczeniowej dzielone są na 4 mniejsze elementy dla problemów dwuwymiarowych lub na 8 mniejszych elementów dla problemów trójwymiarowych.
2. Jednorodna  $p$  adaptacja, w której wielomianowy stopień aproksymacji podnoszony jest globalnie na wszystkich elementach skończonych w całym obszarze siatki MES.
3.  $h$  adaptacja, w której jedynie niektóre elementy skończone są łamane, tylko w tych miejscach obszaru obliczeniowego w których błąd rozwiązania numerycznego jest duży. W przypadku obszaru dwuwymiarowego możliwe jest złamanie elementu skończonego w kierunku poziomym, pionowym lub w obydwu kierunkach. W przypadku obszaru trójwymiarowego możliwe jest złamanie elementu skończonego w jednym z trzech kierunków osi  $x, y, z$  lub w dwóch lub w trzech kierunkach jednocześnie.
4.  $hp$  adaptacja, w której jedynie niektóre elementy skończone są łamane, oraz wielomianowy rząd aproksymacji podnoszony jest jedynie na niektórych elementach skończonych.

Dokonyamy teraz porównania wszystkich powyższych strategii adaptacji, opierając się na wzorcowym problemie obliczenia rozkładu ciepła w obszarze w kształcie litery L, zaproponowanym przez Ivo Babuškę (Babuška i in., 1986a; Babuška i in., 1986b)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & w & \Omega \\ u = 0 & na & \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & na & \Gamma_N \end{cases} \quad (1)$$



Rysunek 1. Warunki brzegowe dla problemu obliczenia rozkładu ciepła w obszarze w kształcie litery L (boundary conditions for L-shape domain heat transfer problem).

Powyższy układ równań zapisany został w kartezjańskim układzie współrzędnych o początku w punkcie  $O$ , przedstawionym na rysunku 1. Zerowy warunek brzegowy Dirichleta założony został na dwóch wewnętrznych krawędziach obszaru, warunek brzegowy Neumanna założony został na czterech zewnętrznych krawędziach obszaru, patrz rysunek 1.

Po prawej stronie warunku brzegowego Neumanna zdefiniowanego we wzorze (1) występuje funkcja  $g$ , która obliczana jest na podstawie znanego rozwiązania dokładnego

$$u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} \left( \theta + \frac{\Pi}{2} \right) \quad (2)$$

gdzie  $(r, \theta)$  to współrzędne w biegunowym układzie współrzędnych o początku w punkcie  $O$ , zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, przedstawionym na rysunku 1. Pierwsze pochodne rozwiązania są osobliwe w punkcie centralnym obszaru. Z tego powodu w punkcie tym występują osobliwości rozwiązania numerycznego. W celu polepszenia jakości rozwiązania konieczna jest adaptacja siatki MES.

Dla tak zdefiniowanego problemu uruchomiono wszystkie powyższe strategie adaptacji siatki. Automatyczny kod  $hp$  adaptacji umożliwia również uruchamianie wymienionych prostszych strategii adaptacji. Porównanie siatek optymalnych dostarczających



rozwiązanie z dokładnością 0.1% błędu względnego w normie energetycznej zaprezentowano na rysunku 2. Błąd względny w normie energetycznej  $e_{rel}$  dotyczący rozwiązania na danej siatce elementów skończonych zdefiniowany jest jako

$$e_{rel} = \frac{\|u_{h,p} - u_{h/2,p+1}\|_1}{\|u_{h/2,p+1}\|_1} \quad (3)$$

gdzie  $u_{h,p}$  oznacza rozwiązanie na danej siatce elementów skończonych,  $u_{h/2,p+1}$  oznacza rozwiązanie na siatce powstałej poprzez podzielenie każdego elementu z danej siatki na 4 elementy (w przypadku siatki dwuwymiarowej) lub 8 elementów (w przypadku siatki trójwymiarowej) oraz podniesieniu rzędu aproksymacji wielomianowej o 1 we wnętrzu każdego elementu, na każdej krawędzi elementu oraz na każdej ścianie elementu w przypadku siatki trójwymiarowej, natomiast  $\|\cdot\|_1$  oznacza normę energetyczną czyli normę w przestrzeni Sobolewa  $H^1$ .

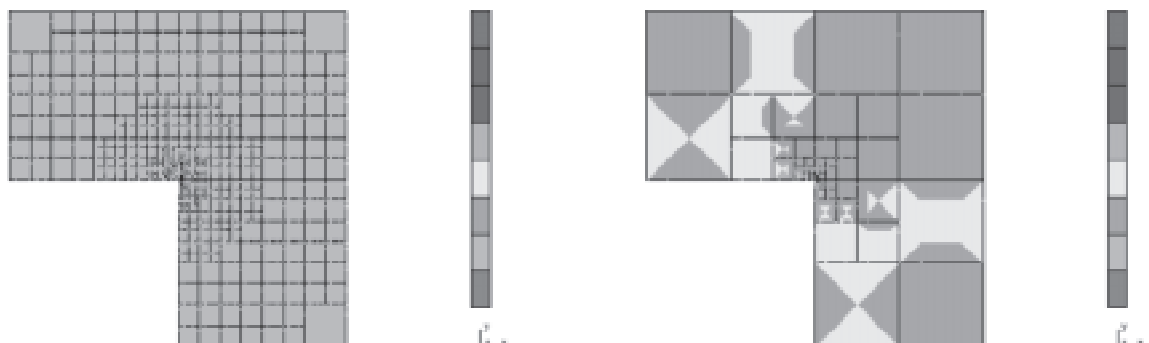
Porównanie zbieżności poszczególnych metod adaptacji przedstawiono na rysunku 3. Pozioma oś przedstawia logarytm dziesiętny z ilości stopni swobody na aktualnej siatce MES, pionowa oś przedstawia procent błędu względnego rozwiązania w normie energetycznej.

Najbardziej kosztowną strategią adaptacji jest jednorodna  $h$  adaptacja. Następne klasyfikują się metody jednorodnej  $p$  adaptacji uruchomione na siatce startowej złożonej z 3 i 12 elementów. Metody  $p$  adaptacji ograniczone są przez maksymalny stopień wielomianu  $p = 9$  zaimplementowany w kodzie.

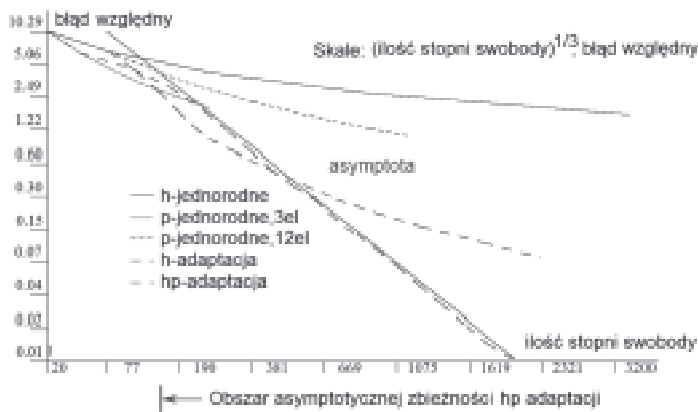
Kod automatycznej  $h$  adaptacji zagęszcza siatkę w kierunku centralnej osobliwości. W celu wygładzenia rozwiązania na pozostałej części obszaru konieczne było zagęszczenie siatki elementów skończonych. Kod automatycznej  $hp$  adaptacji łamie elementy skończone w okolicy centralnej osobliwości, a w pozostałej części obszaru modyfikuje odpowiednio stopień aproksymacji wielomianowej. Maksymalna dokładność uzyskana przez nas z pomocą metody  $h$  adaptacji to 0.07% błędu względnego w normie energetycznej dla 1700 stopni swobody (patrz rysunek 3). Podobną dokładność rozwiązania uzyskać można z pomocą kodu  $hp$  adaptacji używając jedynie około 900 stopni swobody. Wynika stąd że z pomocą metody  $hp$  adaptacji możliwe jest uzyskanie rozwiązania o takiej samej dokładności na siatce elementów skończonych zawierającej istotnie mniej stopni swobody. Metoda  $hp$  adaptacji jest więc rozwiązaniem tańszym od metody  $h$  adaptacji, ponieważ koszt rozwiązania problemu rośnie wraz z ilością użytych stopni swobody.

Począwszy od pewnego momentu, jedynie metoda  $hp$  adaptacji zbiega się asymptotycznie na wykresie na którym błąd względny przedstawiono względem ilości stopni swobody w potęgzie 1/3 (patrz górny wykres na rysunku 3). Mówimy że jedynie metoda  $hp$  adaptacji zbiega się eksponencjalnie. Na wykresie na którym przedstawiono logarytm dziesiętny błędu względnego w normie energetycznej względem logarytmu z ilości stopni swobody, metoda  $h$  adaptacji zbiega się asymptotycznie, natomiast metoda  $hp$  adaptacji zbiega się jeszcze szybciej (patrz dolny wykres na rysunku 3). Eksponencjalna zbieżność metody  $hp$  adaptacji jest potwierdzona teoretycznie (Schwab, 1998).

Z naszych doświadczeń wynika że punkt na krzywej zbieżności w którym  $hp$  adaptacja zyskuje przewagę nad  $h$  adaptacją występuje tym bliżej i bardziej



Rysunek 2. Porównanie siatki optymalnej uzyskanej z pomocą metody  $h$  adaptacji (dla  $p = 2$ ) z siatką optymalną uzyskana z pomocą metody  $hp$  adaptacji dostarczające rozwiązanie z dokładnością 0.1%. Automatyczna  $hp$  adaptacji łamie elementy skończone w obszarze osobliwości, podnosząc stopień aproksymacji wielomianowej w pozostałym obszarze siatki. Różne kolory oznaczają różny stopień aproksymacji wielomianowej  $p=1,2,\dots,8$ . (Comparison of optimal  $h$ -adaptive ( $p = 2$ ) and  $hp$ -adaptive meshes delivering 0.1 % accuracy. The  $hp$  FEM keeps breaking the elements at the singularity point but replaces the  $h$  refinements in the regular regions with higher order elements. The color scale indicates varying order of polynomial degree  $p = 1,2,\dots,8$ ).



Rysunek 3. Porównanie zbieżności dla strategii jednorodnej  $h$  adaptacji, jednorodnej  $p$  adaptacji (dla 3 lub 12 elementów siatki początkowej),  $h$  adaptacji (dla  $p = 2$ ), oraz  $hp$  adaptacji. Metoda  $hp$  adaptacji zbiega się asymptotycznie na wykresie na którym przedstawiono logarytm z błędów względnym przedstawiono względem ilości stopni swobody w potęgzie  $1/3$ . Metoda  $h$  adaptacji zbiega się asymptotycznie na wykresie na którym przedstawiono logarytm z błędów względnym w odniesieniu do logarytmu z ilości stopni swobody, natomiast metoda  $hp$  adaptacji zbiega się jeszcze szybciej. (Comparison of convergence for uniform  $h$ , uniform  $p$  (two initial meshes of 3 or 12 elements),  $h$ -adaptive ( $p = 2$ ), and the  $hp$ -adaptive refinements. The method of  $hp$  adaptivity converges in asymptotic way when relative error is drawn versus number of degrees of freedom in power of  $1/3$ . The method of  $h$  adaptivity converges exponentially on log-log scale, and the  $hp$  adaptivity is faster in such a case).

złożony jest rozważany problem. Na przykład dla opisanego poniżej dwuwymiarowego problemu obliczenia anizotropowego rozkładu ciepła we wnętrzu baterii, metoda  $hp$  adaptacji dostarcza rozwiązanie z dokładnością 1% na siatce zawierającej 7 tysięcy stopni swobody, metoda  $p$  adaptacji startująca z zaprojektowanej ręcznie przez specjalistę siatki potrzebuje 250 tysięcy stopni swobody dla zapewnienia dokładności 1%, natomiast metoda  $h$  adaptacji nie jest w stanie w ogóle osiągnąć takiej dokładności.

## 2. ROZPROSZONA STRUKTURA DANYCH DO PRZECHOWYWANIA SIATKI ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

### 2.1. Rodzaje użytych elementów skończonych

Sekwencyjny dwuwymiarowy kod automatycznej  $hp$  adaptacji używa elementów trójkątnych oraz prostokątnych. Możliwe jest łączenie obydwu rodzajów elementów na jednej siatce. Sekwencyjny kod trójwymiarowy używa elementów prostopadłościennych. Kody równoległe używają wyłącznie elementów prostokątnych w przypadku siatek dwuwymiarowych oraz prostopadłościennych w przypadku siatek trójwymiarowych.

Każdy element prostopadłościenny w trzech wymiarach posiada 8 wierzchołków w których stopień

aproksymacji wielomianowej wynosi 1. Każdy element element prostopadłościenny posiada 12 krawędzi. Rząd aproksymacji wielomianowej na każdej krawędzi może zmieniać się dowolnie od pierwszego do maksymalnego zaimplementowanego stopnia (w aktualnej wersji kodu maksymalny stopień aproksymacji wielomianowej ustalony został na 9, jednakże zwiększenie maksymalnego stopnia aproksymacji jest trywialne i wymaga jedynie dodanie nowych funkcji kształtu do rodziny hierarchicznych funkcji kształtu). Na każdej krawędzi użyte zostały jednowymiarowe hierarchiczne funkcje kształtu Lagrange'a, które umożliwiają proste zwiększanie stopnia aproksymacji wielomianowej (Demkowicz, i in. 2002b). Na każdej ścianie elementu prostopadłościennego użyte zostały dwuwymiarowe hierarchiczne funkcje kształtu zdefiniowane jako iloczyn tensorowy dwóch jednowymiarowych hierarchicznych funkcji kształtu (Demkowicz i in., 2002b). Umożliwiają one dowolne zmiany stopnia aproksymacji wielomianowej, od pierwszego do maksymalnego, w każdym z dwóch kierunków w lokalnym układzie współrzędnych ściany. We wnętrzu każdego elementu prostopadłościennego użyte zostały trójwymiarowe hierarchiczne funkcje kształtu zdefiniowane jako iloczyn tensorowy trzech jednowymiarowych hierarchicznych funkcji kształtu (Demkowicz i in., 2002b). Umożliwiają one dowolne zmiany stopnia aproksymacji wielomianowej, od pierwszego do maksymalnego, w każdym z trzech kierunków w lokalnym układzie współrzędnych elementu. Tak więc każdy element skończony może mieć różne stopnie aproksymacji wielomianowej na każdej krawędzi, różne stopnie aproksymacji wielomianowej na każdej ścianie w każdym z dwóch kierunków, oraz we wnętrzu, w każdym z trzech kierunków.

Elementy prostokątne na siatkach dwuwymiarowych mają podobną strukturę, posiadają 4 wierzchołki ze stopniem aproksymacji wielomianowej ustalonym na 1, 4 krawędzie z dowolnym stopniem aproksymacji wielomianowej, i środek z dowolnymi stopniami aproksymacji wielomianowej w każdym z dwóch możliwych kierunków (Demkowicz, 2002a).

Mówimy że element posiada *jednorodny stopień aproksymacji wielomianowej  $p$*  jeśli stopień aproksymacji każdej jego krawędzi, każdej ściany w każdym z dwóch kierunków oraz jego wnętrza w każdym z trzech kierunków wynosi  $p$ .

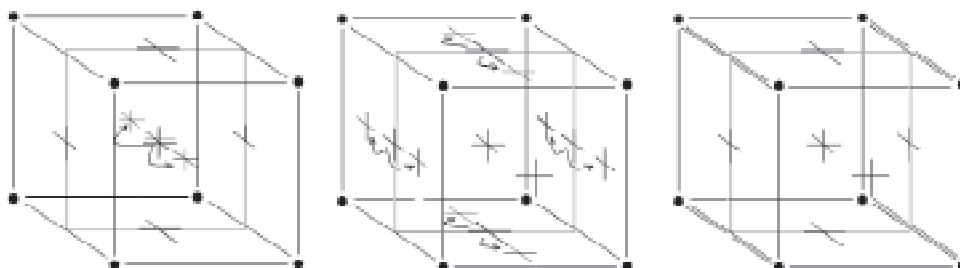
### 2.2. Odwzorowanie geometrii modelowanego obszaru

Geometria modelowanego obszaru opisana jest z pomocą listy tzw. obiektów GMP (Geometrical Modeling Package) (Dong Xue i in., 2002), definiujących płaszczyzny, cylindry, sfery oraz elipsoidy. Pakiet



GMP jest pakietem otwartym, możliwe jest definiowanie i dodawanie nowych typów obiektów GMP. Elementy skończone siatki początkowej rozpinane są na obiektach GMP. Krawędzie i ściany używanych elementów prostopadłościennych automatycznie aproksymują geometrię modelowanego obszaru zdefiniowanego za pomocą obiektów GMP (Dong Xue i in., 2002). Opisane powyżej elementy prostopadłościenne są to tzw. elementy izoparametryczne, w których te same funkcje kształtu używane są do aproksymacji rozwiązania jak i do aproksymacji geometrii modelowanego obszaru. Oznacza to na przykład że jeśli określimy geometrię obszaru jako obiekt GMP definiujący cylinder, oraz dwóch obiektów GMP definiujących płaszczyzny definiujących spód i górę cylindra, a następnie wypełnimy cylinder 4 prostopadłościennymi elementami skończonymi w których użyto jednorodnego stopnia aproksymacji wielomianowej  $p = 1$ , wówczas obszar obliczeniowy będzie miał kształt prostopadłościanu, ponieważ wielomiany pierwszego rzędu nie są w stanie odwzorować geometrii cylindra. Konieczne jest użycie siatki początkowej zawierającej np. 4 elementy o jednorodnym stopniu aproksymacji wielomianowej  $p = 2$ . Nazwa element "prostopadłościenny" jest więc o tyle myląca, że element ten może odwzorować praktycznie dowolnie skomplikowaną geometrię. Innymi słowy krawędzie elementów "prostopadłościennych" mogą być opisane z pomocą wielomianów dowolnego stopnia, od pierwszego do takiego rzędu aproksymacji wielomianowej, który jest używany na tej krawędzi w celu aproksymacji rozwiązania używanego problemu. Ściany elementów "prostopadłościennych" mogą być opisane z pomocą wielomianów dowolnego stopnia w każdym z dwóch możliwych kierunków, w lokalnym układzie współrzędnych ściany, od pierwszego do takiego rzędu aproksymacji wielomianowej, który jest używany na tej ścianie w celu aproksymacji rozwiązania używanego problemu. Przykładem skomplikowanej geometrii opisanej z pomocą pakietu GMP i modelowanym z pomocą trójwymiarowego kodu automatycznej *hp* adaptacji z użyciem opisanych powyżej elementów "prostopadłościennych" jest model ludzkiej głowy (Dong Xue, 2005).

- wierzchołek
- węzeł reprezentujący krawędź
- + węzeł reprezentujący ścianę
- ⊕ węzeł reprezentujący wnętrze elementu



Rysunek 4. Podzielenie elementu na 2 nowe elementy (Breaking of an element into 2 son elements).

### 2.3. Adaptacje siatki

W czasie działania algorytmu automatycznej *hp* adaptacji elementy skończone z początkowej siatki MES mogą zostać podzielone na nowe mniejsze elementy. Element prostokątny z siatki dwuwymiarowej może zostać podzielony na 4 nowe elementy, lub na 2 nowe elementy w jednym z dwóch możliwych kierunków. Element prostopadłościenny z siatki trójwymiarowej może zostać podzielony na 8 nowych elementów, lub na 4 nowe elementy w jednym z trzech możliwych kierunków, lub na 2 nowe elementy w jednym z 3 możliwych kierunków. W strukturze danych przechowywane są jedynie elementy siatki początkowej. Nowe elementy, powstałe w wyniku działania adaptacji, *nie są przechowywane* w strukturze danych. Zamiast tego, w strukturze danych tworzone są węzły nowo powstałych elementów. Węzły te przechowywane są w drzewach o wierzchołkach w węzłach elementów siatki początkowej.

Rozważmy dla przykładu podział elementu siatki początkowej na 2 nowe elementy, przedstawiony na rysunku 4.

1. Powstają dwa nowe węzły reprezentujące środki nowych elementów, oraz 1 nowy węzeł reprezentujący ścianę wspólną nowych elementów. Nowo powstałe węzły stają się dziećmi węzła środka elementu siatki początkowej.
2. Powstaje 8 nowych węzłów reprezentujących ściany boczne nowych elementów oraz 4 nowe węzły reprezentujące krawędzie wspólne nowych elementów. Nowo powstałe węzły stają się dziećmi odpowiednich węzłów reprezentujących ściany elementu siatki początkowej.
3. Powstaje 8 nowych węzłów reprezentujących krawędzie boczne nowych elementów. Nowo powstałe węzły stają się dziećmi odpowiednich węzłów reprezentujących krawędzie elementu siatki początkowej.

Mówimy że podczas dzielenia elementu łamane jest jego wnętrze (punkt 1), łamane są jego ściany (punkt 2), łamane są jego krawędzie (punkt 3). W przypadku dalszych adaptacji siatki, powstają wielopoziomowe

drzewa węzłów o korzeniach w węzłach elementów siatki początkowej. Obliczenia MES prowadzone są na *aktywnych elementach* wyznaczanych poprzez przeglądanie drzew węzłów elementów siatki początkowej. Węzły aktywnych elementów to liście drzew przechowywanych w strukturze danych.

## 2.4. Rozproszona struktura danych

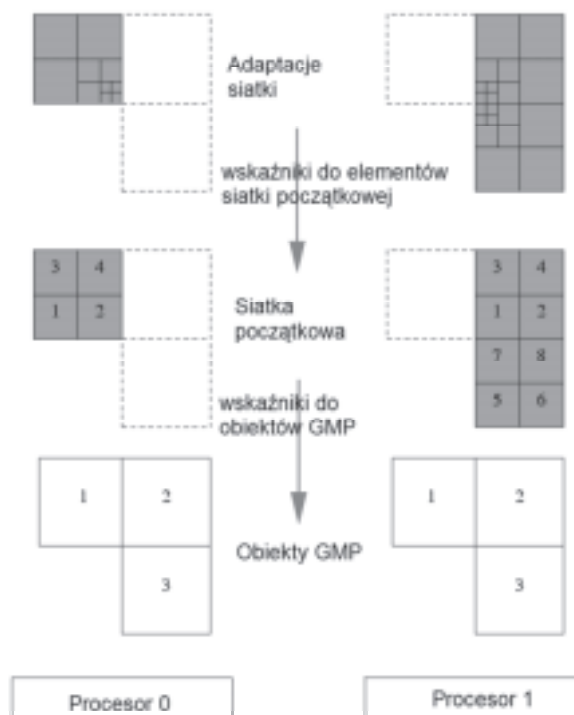
Siatka elementów skończonych przechowywana jest w rozproszonej strukturze danych (Paszyński i in., 2005a; Paszyński i in., 2006), przedstawionej na rysunku 5. Każdy procesor przechowuje wszystkie obiekty GMP definiujące geometrię modelowanego obszaru. Na początku obliczeń każdy procesor generuje elementy skończone siatki początkowej w niektórych obiektach GMP, które zostały mu przypisane w taki sposób aby każdy procesor miał podobną ich liczbę. Elementy skończone siatki początkowej przechowują wskaźniki do obiektów GMP w których zostały wygenerowane. Ponadto każdy element siatki początkowej przechowuje wskaźniki do wszystkich sąsiadujących elementów siatki początkowej, które mogą również znajdować się na sąsiednich procesorach. W czasie działania algorytmu automatycznej *hp* adaptacji elementy skończone z początkowej siatki MES mogą zostać podzielone na nowe mniejsze elementy. W strukturze danych przechowywane są węzły nowo tworzonych elementów, w postaci drzew o korzeniach w węzłach elementów siatki początkowej. Tak więc jeśli dany element aktywny potrzebuje wyznaczyć sąsiadujące elementy aktywne, konieczne jest przejście do korzenia drzewa węzłów, do elementu siatki początkowej, następnie znalezienie sąsiadującego elementu siatki początkowej z użyciem wskaźników do sąsiadów przechowywanych w elementach siatki początkowej, i w końcu zejście w dół drzew węzłów sąsiadującego elementu siatki początkowej (drzewa węzłów rosną "korzeniami do góry").

## 2.5. Zasady regularności siatki

W czasie wykonywania adaptacji siatki, wymuszane są następujące zasady regularności siatki:

1. Wnętrze elementu zawsze może zostać złamane.
2. Ściana elementu może zostać złamana tylko wtedy gdy złamane są wszystkie wewnątrz elementów sąsiadujących do danej ściany.
3. Krawędź elementu może zostać złamana tylko wtedy gdy złamane są wszystkie ściany sąsiadujące z daną krawędzią.
4. Dany element może zostać złamany tylko jeden raz bez konieczności łamania elementów sąsiadujących.

5. Stopień aproksymacji wielomianowej na ścianie elementu nie może być większy niż stopień aproksymacji we wnętrzu elementu w stosownym kierunku.
6. Stopień aproksymacji wielomianowej na krawędzi elementu nie może być większy niż stopień aproksymacji na ścianie elementu w stosownym kierunku.



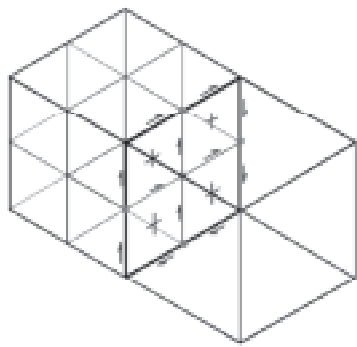
Rysunek 5. Rozproszona struktura danych do przechowywania siatki MES (Distributed data structure for finite element mesh).

Reguły 5 i 6 noszą nazwę *reguł minimalnego stopnia aproksymacji wielomianowej* i są one naturalną konsekwencją faktu, iż nie da się znaleźć wielomianu określonego na płaszczyźnie, stopnia  $p$  względem zmiennej określonej na osi równoległej do danej krawędzi, który po zawężeniu do tej krawędzi byłby wielomianem stopnia  $p + 1$ .

Reguły 1-3 oznaczają np. że jeśli łamany jest element sąsiadujący do danej ściany, ale element po drugiej stronie ściany nie jest złamany, to dana ściana pozostaje niezłamana, patrz rysunek 6. Reguła 4 oznacza że jeśli łamany jest jeden z nowo powstałych elementów przyległy do niezłamanej ściany, to wówczas *wymuszane jest* złamanie elementu sąsiadującego, patrz rysunek 7.

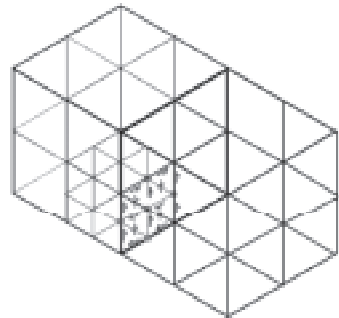
Wymuszanie powyższych zasad regularności siatki stanowi jedną z głównych komplikacji podczas implementacji równoległych kodów automatycznej *hp* adaptacji (Paszyński i in., 2005a; Paszyński i in., 2006).





- Nie istniejący jeszcze węzeł krawędzi
- Nie istniejący jeszcze wierzchołek
- ‡ Nie istniejący jeszcze węzeł ściany

Rysunek 6. Łamanie elementu skończonego (Refinement of a finite element).



- Nie istniejący jeszcze węzeł krawędzi
- Nie istniejący jeszcze wierzchołek
- ‡ Nie istniejący jeszcze węzeł ściany

Rysunek 7. Ponowne złamanie nowego elementu wymusza złamanie elementu sąsiadującego (Next refinement leads to breaking of the neighboring element).

### 3. AUTOMATYCZNA STRATEGIA *HP* ADAPTACJI

W rozdziale opisano zasadę działania automatycznej strategii *hp* adaptacji, na przykładzie obliczenia dwuwymiarowego anizotropowego rozkładu ciepła wewnątrz baterii. W problemie tym poszczególne fragmenty obszaru opisane są stałymi materiałowymi różniącymi się o 6 rzędów wielkości. Powoduje to powstawanie osobliwości rozwiązania numerycznego na styku obszarów o różnych stałych materiałowych. Obszar obliczeniowy przedstawiono na rysunku 8.

Rozwiązywane równanie to

$$\nabla(K\nabla u) = f^{(k)} \quad (4)$$

gdzie

$$K = K^{(k)} = \begin{bmatrix} K_x^{(k)} & 0 \\ 0 & K_y^{(k)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

stałe materiałowe dla poszczególnych materiałów dane są jako

$$K_x^{(k)} = \begin{cases} 25 & \text{dla } k=1 \\ 7 & \text{dla } k=2 \\ 5 & \text{dla } k=3 \\ 0.2 & \text{dla } k=4 \\ 0.05 & \text{dla } k=5 \end{cases} \quad (6)$$

$$K_y^{(k)} = \begin{cases} 25 & \text{dla } k=1 \\ 0.8 & \text{dla } k=2 \\ 0.0001 & \text{dla } k=3 \\ 0.2 & \text{dla } k=4 \\ 0.05 & \text{dla } k=5 \end{cases} \quad (7)$$

funkcja  $f$  występująca po prawej stronie wzoru (4) dana jest wzorem

$$f^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k=1 \\ 1 & \text{dla } k=2 \\ 1 & \text{dla } k=3 \\ 0 & \text{dla } k=4 \\ 0 & \text{dla } k=5 \end{cases} \quad (8)$$

warunek brzegowy zdefiniowany jest jako mieszany warunek Dirichleta i Neumanna

$$K^{(i)}\nabla u \circ n = g^{(i)} - \alpha^{(i)}u \quad (9)$$

gdzie  $g^{(i)}$  oraz  $\alpha^{(i)}$  to zadane funkcje.

Kod automatycznej *hp* adaptacji startuje z zadanej siatki początkowej (siatka "rzadka"), następnie dokonuje podziału każdego elementu oraz zwiększa jednorodnie rząd aproksymacji w celu uzyskania siatki "gęstej", co zostało zaprezentowane na rysunku 9.

Następnie rozważany problem rozwiązywany jest na siatkach rzadkiej i gęstej. Decyzja o optymalnych adaptacjach siatki "rzadkiej" podejmowana jest na pod-



Rysunek 8. Przekrój przez wnętrze baterii z różnymi parametrami materiałowymi zaznaczonymi różnymi kolorami (Cross-section of battery interior with different material properties denoted by different colors).



stawie porównania obydwu rozwiązań, na siatce "rzadkiej" i na siatce "gęstej".

Dla każdego elementu siatki "rzadkiej" podejmowana jest decyzja o optymalnej adaptacji elementu. Uzyskana w ten sposób siatka "optymalna" staje się siatką "rzadką" dla kolejnej iteracji algorytmu automatycznej  $hp$  adaptacji, co przedstawiono na rysunku 10. Iteracje powtarzane są tak długo aż błąd rozwiązania na aktualnej siatce optymalnej będzie niższy niż pożądana dokładność rozwiązania.

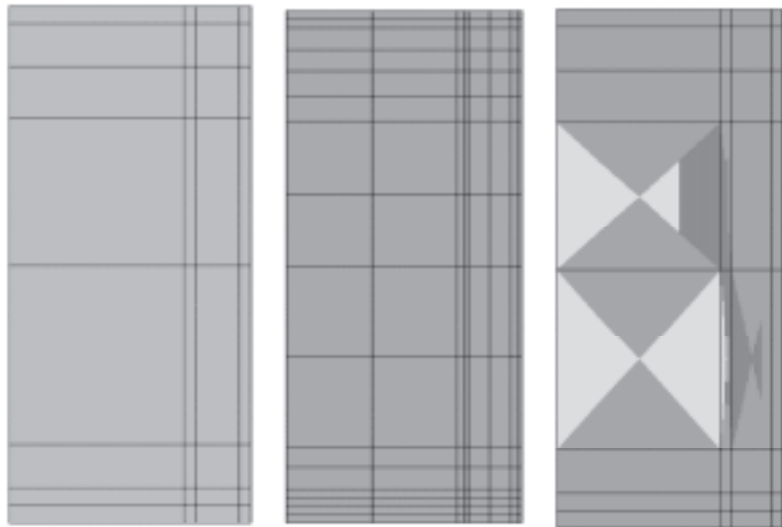
#### 4. PODEJMOWANIE LOKALNYCH DECYZJI O ADAPTACJI ELEMENTÓW

Dla każdego elementu siatki "rzadkiej" rozważane są różne strategie adaptacji elementu, przedstawione na rysunku 11. Na przykład, gdy element prostokątny z siatki dwuwymiarowej posiada ten sam stopień aproksymacji wielomianowej  $p$  na każdej swojej krawędzi oraz w obydwu kierunkach w węźle środkowym, wówczas rozważane są następujące scenariusze:

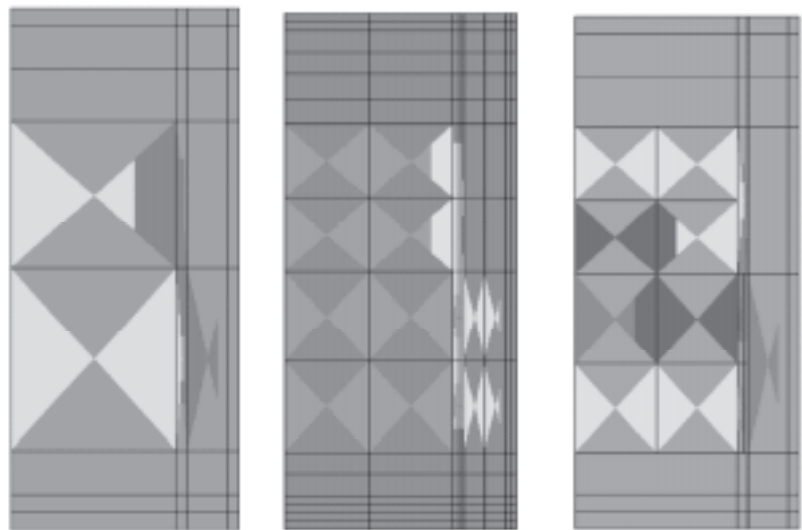
1. Stopień aproksymacji wielomianowej podniesiony zostanie o 1 w każdym kierunku we wnętrzu elementu, tak że element posiadał będzie jednorodny stopień aproksymacji  $p+1$ .
2. Element zostanie złamany w kierunku poziomym na 2 nowe elementy. Stopnie aproksymacji wielomianowej w każdym kierunku we wnętrzach nowych elementów podnoszony jest do  $p+1$ .
3. Element zostanie złamany w kierunku pionowym na 2 nowe elementy. Stopnie aproksymacji wielomianowej w każdym kierunku we wnętrzach nowych elementów podnoszony jest do  $p+1$ .
4. Element zostanie złamany na 4 nowe elementy. Stopnie aproksymacji wielomianowej w każdym kierunku we wnętrzach nowych elementów podnoszony jest do  $p+1$ .

Możliwe jest również rozpatrzenie następujących scenariuszy:

5. Stopień aproksymacji wielomianowej w kierunku pionowym we wnętrzu elementu zmodyfikowany zostanie do stopnia  $p_1$  takiego że  $1 < p_1 < p$ ,
6. Element zostanie złamany w kierunku poziomym na 2 nowe elementy. Stopnie aproksymacji wielo-



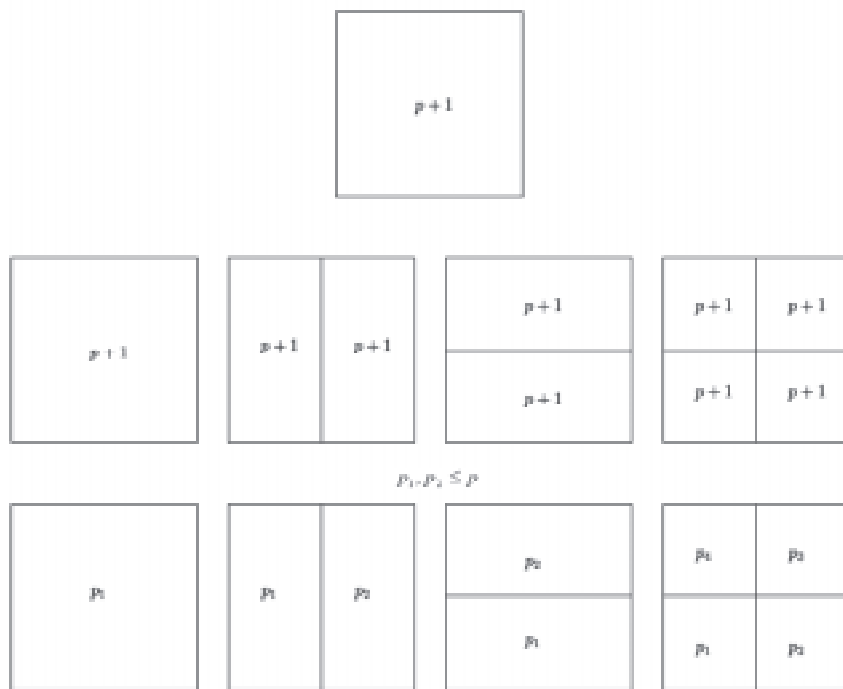
Rysunek 9. Lewy rysunek: Przykładowa siatka "rzadka". Środkowy rysunek: Siatka "gęsta" powstała poprzez podzielenie każdego elementu na 4 oraz zwiększenie rzędu aproksymacji wielomianowej. Prawy rysunek: Siatka optymalna stworzona automatycznie dzięki porównaniu rozwiązań na siatce "rzadkiej" i "gęstej" (Left-hand-side picture: Example of "coarse" grid. Middle picture: "Fine" grid obtained by breaking each finite element into 4 sons and increasing polynomial order of approximation. Right-hand-side picture: Optimal grid obtained by comparison of solutions over the "coarse" and "fine" grids).



Rysunek 10. Lewy rysunek: Siatka optymalna z poprzedniej iteracji staje się siatką "rzadką" dla kolejnej iteracji. Środkowy rysunek: Siatka "gęsta" w drugiej iteracji powstała poprzez podzielenie każdego elementu na 4 oraz zwiększenie rzędu aproksymacji wielomianowej. Prawy rysunek: Siatka optymalna w drugiej iteracji stworzona automatycznie dzięki porównaniu rozwiązań na siatce "rzadkiej" i "gęstej" (Left-hand-side picture: Optimal grid from previous iteration becomes "coarse" grid for the next iteration. Middle picture: "Fine" grid for the second iteration obtained by breaking each finite element into 4 sons and increasing polynomial order of approximation. Right-hand-side picture: Optimal grid for the second iteration obtained by comparison of solutions over the "coarse" and "fine" grids).

- mianowej we wnętrzach nowych elementów zmodyfikowane zostaną do  $p_1, p_2$  takich że  $1 < p_1, p_2 < p$ .
7. Element zostanie złamany w kierunku pionowym na 2 nowe elementy. Stopnie aproksymacji wielomianowej we wnętrzach nowych elementów zmodyfikowane zostaną do  $p_1, p_2$  takich że  $1 < p_1, p_2 < p$ .





Rysunek 11. Różne możliwe strategie zagęszczenia elementu prostokątnego o jednorodnym stopniu aproksymacji wielomianowej  $p$ . (Various possible refinement strategies for rectangular element with uniform polynomial order of approximation  $p$ ).

8. Element zostanie złamany na 4 nowe elementy. Stopnie aproksymacji wielomianowej w każdym kierunku we wnętrzach 4 nowych elementów zmodyfikowane zostaną do  $p_i$  takich że  $1 \leq p_i < p, i = 1, \dots, 4$ .

Dla każdej powyższej strategii szacowany jest zysk takiej operacji, z pomocą wyrażenia

$$rate = \frac{\|u_{h/2, p+1} - w_{h, p}\|_1 - \|u_{h/2, p+1} - w_{h, p}^{new}\|_1}{\Delta dof} \quad (10)$$

$u_{h/2, p+1}$  oznacza rozwiązanie na siatce gęstej powstałej poprzez podzielenie każdego elementu z siatki "rzadkiej" na 4 elementy (w przypadku siatki dwuwymiarowej) lub podzielenie każdego elementu z siatki rzadkiej na 8 elementów (w przypadku siatki trójwymiarowej),  $w_{h, p}$  oznacza wynik lokalnej interpolacji rozwiązania na elemencie siatki rzadkiej,  $w_{h, p}^{new}$  oznacza wynik lokalnej interpolacji rozwiązania na testowanej poprawce elementu siatki rzadkiej (dla jednej z powyższych strategii 1-8),  $\Delta dof$  oznacza liczbę stopni swobody dodanych na elemencie siatki rzadkiej podczas rozważania scenariusza (różnice pomiędzy ilością stopni swobody dla elementu adaptowanego w sposób opisany rozważanym scenariuszem, a wyjściową ilością stopni swobody elementu na siatce rzadkiej),  $rate$  jest miarą spadku błędu rozwiązania względem liczby zainwestowanych stopni swobody.

Interpolacje rozwiązania na siatce rzadkiej oraz interpolację rozwiązania na testowanej poprawce elementu siatki rzadkiej obliczane są z pomocą mechanizmu zwanego "projection based interpolation" opracowanego przez Leszka Demkowicza (Demkowicz, 2004, Demkowicz, 2005).

Dla elementów siatki rzadkiej dla których błąd rozwiązania MES jest większy niż  $1/3$  maksymalnego błędu rozwiązania na całej siatce, wybierany jest taki scenariusz adaptacji który da największy zysk (największy spadek błędu rozwiązania względem zainwestowanej ilości stopni swobody).

Należy podkreślić że w algorytmie tym wybierany jest tylko optymalny rząd aproksymacji wielomianowej dla wnętrza elementów. Rzędy aproksymacji wielomianowej dla ścian i krawędzi elementów ustalone będą z pomocą reguły minimalnego stopnia aproksymacji wielomianowej.

W zastosowanym algorytmie podejmowania decyzji o rodzaju adaptacji elementów przeglądane są tylko niektóre scenariusze opisane powyżej. Algorytm wyboru scenariuszy i analizy przypadków adaptacji siatki opisany został w pracy (Kurtz 2005).

Algorytm ten jest w pełni lokalny. Dane wejściowe dla algorytmu stanowią lokalne rozwiązanie na elemencie siatki "rzadkiej" i lokalne rozwiązanie na siatce "gęstej" na elementach powstałych poprzez podział danego elementu (na 4 elementy dla siatek dwuwymiarowych lub na 8 elementów dla siatek trójwymiarowych). Zrównoleglenie algorytmu następuje automatycznie poprzez podział siatki MES na podobszary.

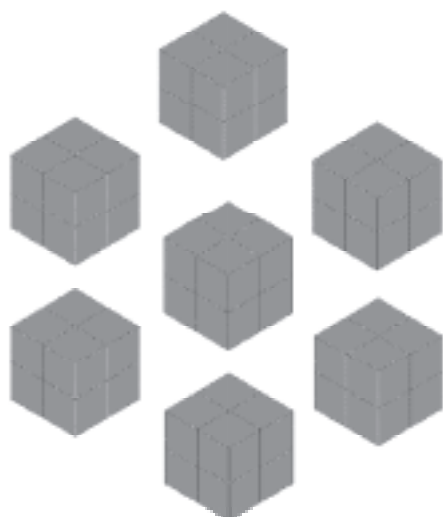
## 5. RÓWNOLEGLA TRÓJWYMIAROWA HP ADAPTACJA

Zaimplementowane zostały wersje równoległe dwu i trójwymiarowych kodów automatycznej  $hp$  adaptacji (Paszyński i in., 2005a; Paszyński i in., 2006). W rozdziale opisano algorytm równoległy na trójwymiarowym przykładzie modelowego problemu Fichera, przedstawionego na rysunku 12.

Problem ten obejmuje rozwiązanie równania Laplace'a (obliczenie rozkładu ciepła) na trójwymiarowej kostce z której usunięto  $1/8$  obszaru. Warunki brzegowe to zerowy warunek brzegowy Dirichleta (zerowa temperatura) na wewnętrznych ścianach kostki, oraz warunek Neumanna definiujący wartość strumienia ciepła na zewnętrznych ścianach kostki, zadany jako



Rysunek 12. Problem modelowy Fichery (The Fichera model problem).



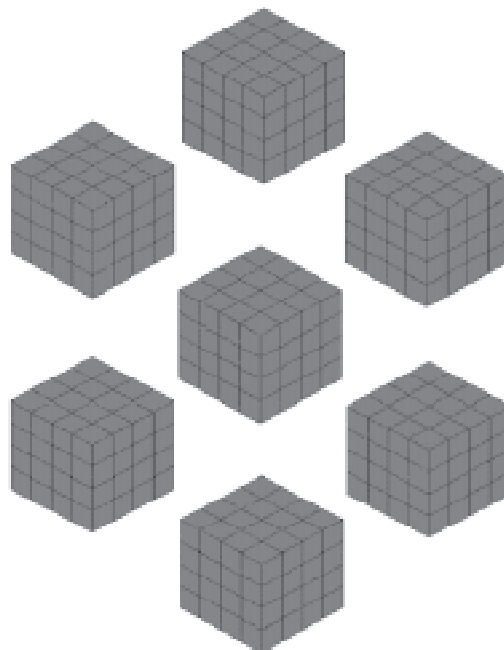
Rysunek 13. Początkowa siatka "rzadka" rozdzielona na 7 procesorów (Initial "coarse" grid redistributed into 7 processors).

znane rozwiązanie dokładne dwuwymiarowego problemu obliczenia rozkładu ciepła na obszarze w kształcie litery L opisanym powyżej.

W problemie tym występują silne osobliwości w centralnym punkcie obszaru oraz wzdłuż wewnętrznych krawędzi usuniętej kostki. Z tego powodu w centralnym punkcie obszaru występuje duży błąd numeryczny rozwiązania, który propaguje na cały obszar obliczeniowy. W celu minimalizacji błędów rozwiązania konieczna jest adaptacja siatki MES.

Równoległy kod automatycznej *hp* adaptacji startuje z siatki "rzadkiej". W wersji równoległej obszar obliczeniowy dzielony jest na podobszary przypisane do poszczególnych procesorów. W przykładzie przedstawionym na rysunku 13 użyto 7 procesorów.

Siatka "rzadka" jest następnie globalnie zagęszczana, każdy element jest dzielony na 8 mniejszych elementów w trzech wymiarach a stopień aproksymacji

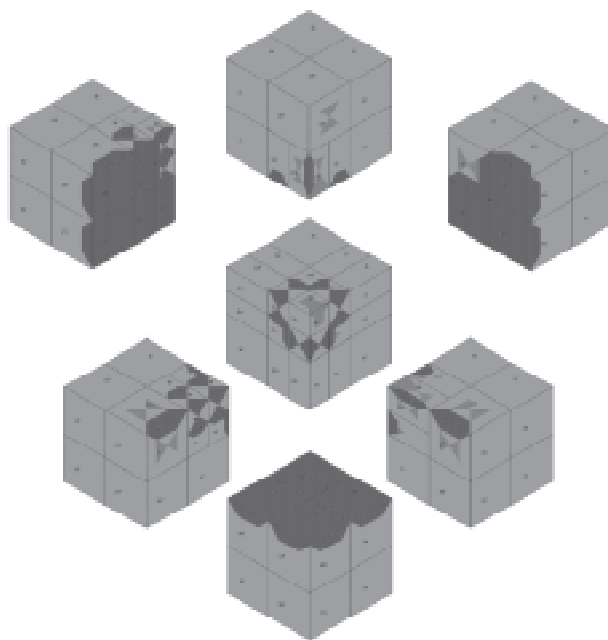


Rysunek 14. Siatka "gęsta" rozdzielona na 7 procesorów ("Fine" grid redistributed into 7 processors).

wielomianowej zwiększany jest o jeden, co przedstawiono na rysunku 14.

Rozważany problem rozwiązywany jest na siatce "rzadkiej" oraz na siatce "gęstej". Dla każdego elementu siatki "rzadkiej" podejmowana jest decyzja o optymalnej adaptacji. Decyzja ta podejmowana jest na podstawie porównania rozwiązań na siatkach "rzadkiej" i "gęstej". Następnie wykonywane są optymalne adaptacje siatki. W ten sposób uzyskuje się siatkę optymalną po pierwszej iteracji, przedstawioną na rysunku 15.

Ponieważ adaptacje elementów siatki "rzadkiej" nie są jednorodne, obciążenia procesorów po wykonaniu



Rysunek 15. Siatka optymalna po pierwszej iteracji (Optimal grid after the first iteration).



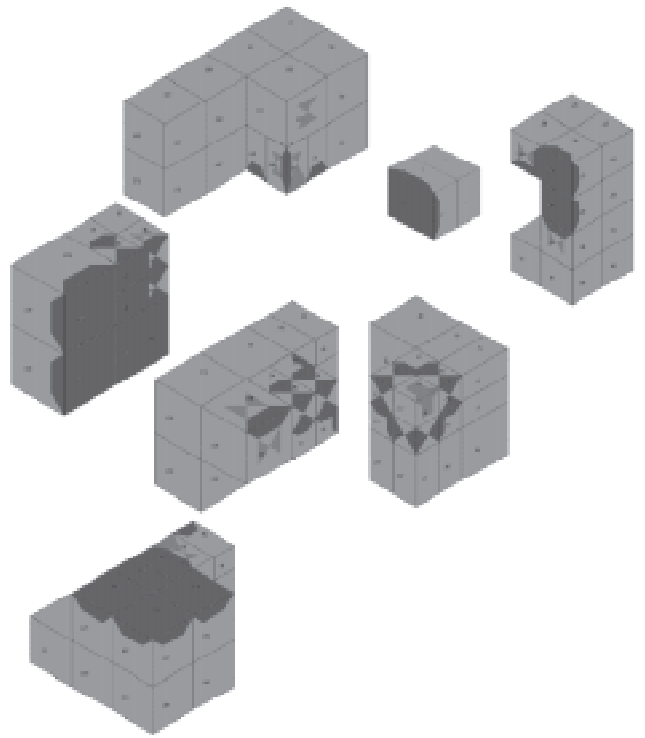
optymalnych adaptacji nie są równomierne. Konieczne jest zbalansowanie obciążeń pomiędzy wszystkimi procesorami. Decyzja o optymalnym podziale aktualnej siatki elementów skończonych pomiędzy procesorami podejmowana jest z pomocą biblioteki ZOLTAN (Devine i in., 1999).

Biblioteka ZOLTAN stanowi zbiór algorytmów dekompozycji obszaru obliczeniowego na podobszary. Jako dane wejściowe przyjmuje ona od każdego procesora zbiór punktów reprezentujących środki elementów siatki początkowej przypisanych do tego procesora wraz z oszacowaniem kosztu obliczeniowego na wszystkich aktywnych elementach skończonych znajdujących się w obrębie danego elementu siatki początkowej. Najkosztowniejszą częścią algorytmu hp adaptacji jest agregacja lokalnej macierzy sztywności na elementach aktywnych. Koszt takiej operacji dla każdego elementu aktywnego może zostać oszacowany od góry przez  $p^7$  gdzie  $p$  oznacza stopień aproksymacji we wnętrzu elementu. Wyrażenie to używane jest jako oszacowanie kosztu obliczeniowego na elementach aktywnych. Koszt obliczeniowy na elemencie siatki początkowej stanowi sumę kosztów obliczeniowych elementów aktywnych znajdujących się we wnętrzu elementu siatki początkowej. Jako dane wyjściowe biblioteka ZOLTAN zwraca każdemu procesorowi listę punktów reprezentujących elementy siatki początkowej wraz z ich drzewami adaptacji siatki, oraz informacje o tym do których procesorów mają one zostać przesłane. Biblioteka ZOLTAN umożliwia wybór jednego spośród wielu dostępnych algorytmów balansowania obciążeń, jak również implementacje swoich własnych algorytmów. W przykładach zaprezentowanych w artykule użyto algorytmu Hilbert Space Filling Curve (HSFC) (Devine i in., 1999).

Pewne fragmenty podobszarów przesyłane są do sąsiadujących podobszarów. Siatka optymalna uzyskana w pierwszej iteracji staje się siatką "rzadką" do drugiej iteracji, co przedstawiono na rysunku 16.

W przypadku obliczeń trójwymiarowych, każdy element prostopadłościenny może mieć różny stopień aproksymacji wielomianowej na każdej krawędzi, na każdej ścianie w każdym z dwóch kierunków oraz we wnętrzu w każdym z trzech kierunków.

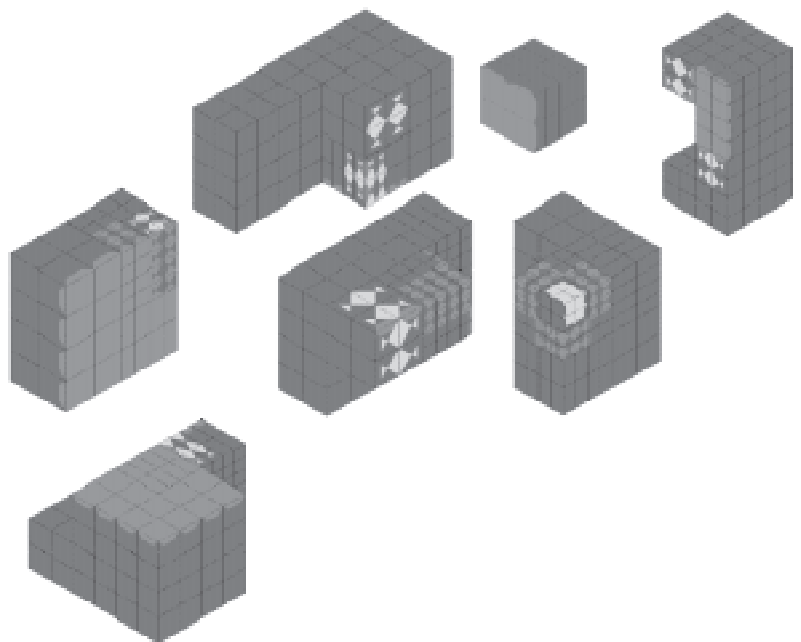
W kolejnej iteracji każdy element siatki "rzadkiej" dzielony jest na 8 nowych elementów, a stopień aproksymacji wielomianowej ponownie jest podnoszony o jeden. Powstaje w ten sposób siatka "gęsta", przedstawiona na rysunku 17. Problem jest ponownie rozwiązywany na nowej siatce



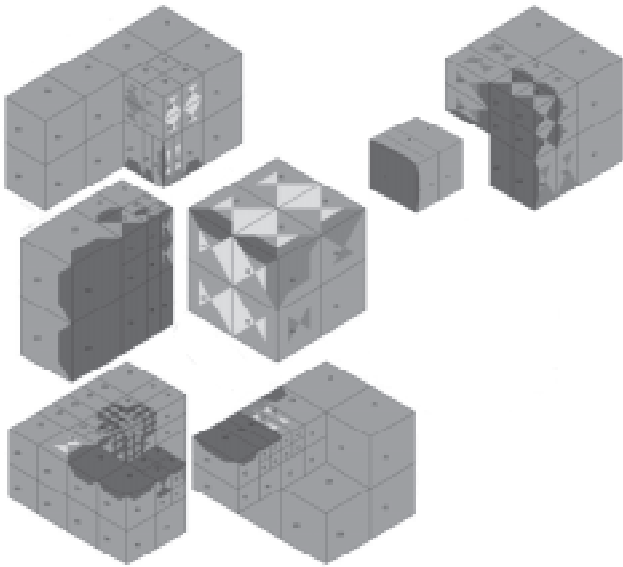
Rysunek 16. Siatka optymalna po zbalansowaniu obciążeń staje się siatką "rzadką" dla drugiej iteracji (Optimal grid after load balancing becomes "coarse" mesh for the second iteration).

"rzadkiej" i "gęstej". Dla każdego elementu z aktualnej siatki "rzadkiej" podejmowane są decyzje o optymalnych adaptacjach. Powstaje w ten sposób nowa siatka optymalna, dla której konieczne jest nowe zbalansowanie obciążeń. Siatka optymalna po drugiej iteracji zbalansowana na 7 procesorów przedstawiona jest na rysunku 18.

Iteracje kontynuowane są tak długo aż osiągnięta



Rysunek 17. Siatka "gęsta" w drugiej iteracji. ("Fine" grid in the second iteration).



Rysunek 18. Siatka optymalna po zbalansowaniu obciążeń po drugiej iteracji. (Optimal grid after load balance after the second iteration).

zostanie pożądana dokładność rozwiązania.

Równoległy algorytm hp adaptacji może zostać opisany w postaci schematu, przedstawionego na rysunku 19.

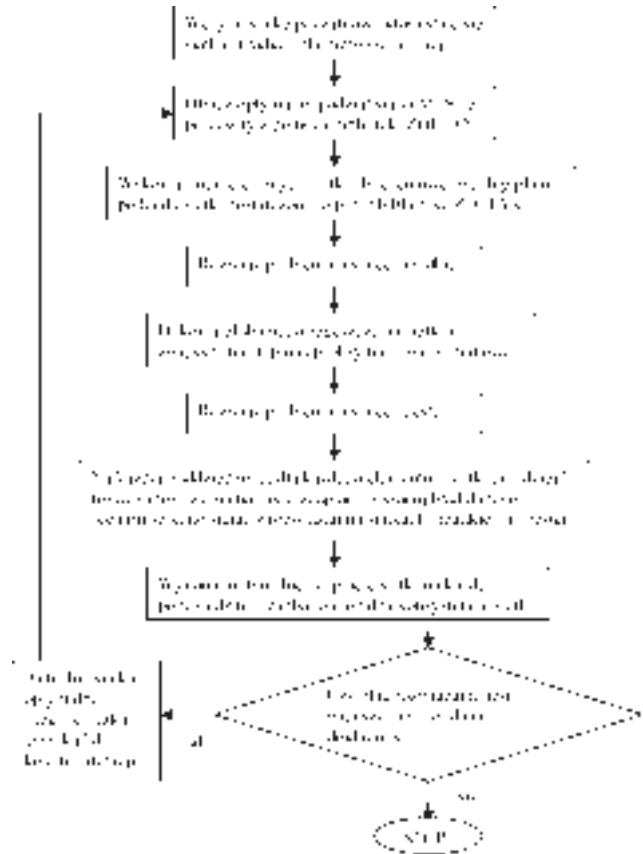
## 6. WYNIKI NUMERYCZNE

### 6.1. Dwuwymiarowy problem obliczenia rozkładu ciepła w obszarze w kształcie litery L

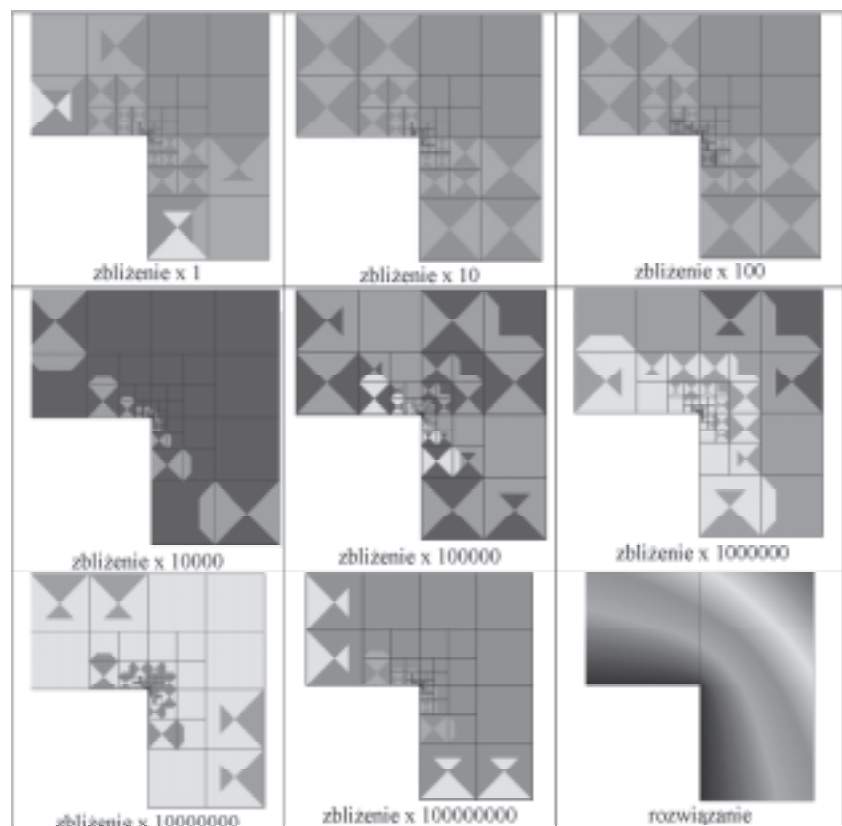
Opis problemu przedstawiono w rozdziale "Strategia adaptacji siatki". Uzyskano rozwiązanie z dokładnością 0.001% błędą względną w normie energetycznej. Wynikową siatkę przedstawiono na rysunku 20.

### 6.2. Dwuwymiarowy problem obliczenia anizotropowego rozkładu ciepła we wnętrzu baterii

Opis problemu przedstawiono w rozdziale "Automatyczna strategia hp adaptacji". Po 43 iteracjach równoległego kodu automatycznej hp adaptacji uzyskano rozwiązanie problemu z dokładnością 0.1 % błędą względną w normie energetycznej. Historia zbieżności przedstawiona została na rysunku 21. Końcowa siatka optymalna dostarczająca rozwiązanie z dokładnością 0.1% posiadała 7 tysięcy stopni swobody, co przedstawiono na rysunku 22.

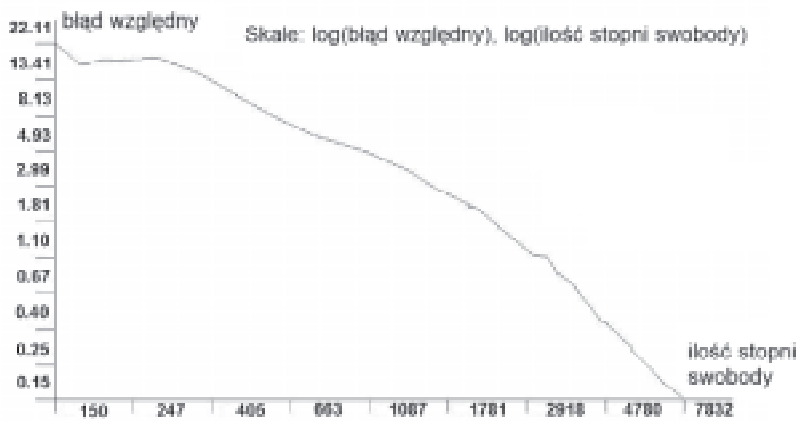


Rysunek 19. Algorytm równoległego kodu automatycznej hp adaptacji. (Algorithm of parallel fully automatic hp adaptive code).

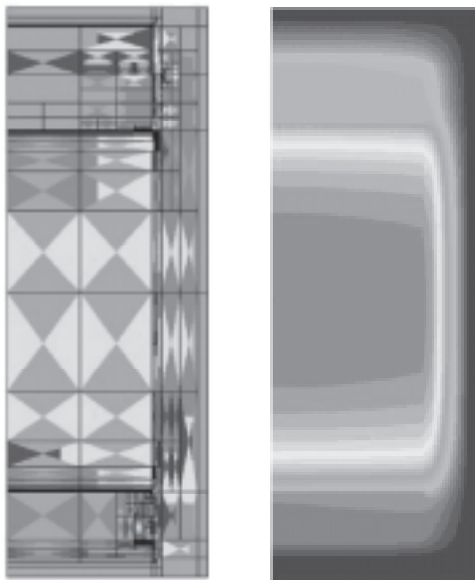


Rysunek 20. Siatka dostarczająca rozwiązanie problemu obliczenia rozkładu ciepła w obszarze w kształcie litery L z dokładnością 0.001% błędą w normie energetycznej. (Finite element mesh providing solution to the heat transport problem over the L-shape domain with accuracy 0.001% error in energy norm).





Rysunek 21. Historia zbieżności dla równoległego kodu automatycznej hp adaptacji dla problemu obliczenia rozkładu ciepła we wnętrzu baterii. Pozioma oś zawiera logarytm z liczby stopni swobody na siatce MES, pionowa oś zawiera błąd rozwiązania, procent błęd względnego w normie energetycznej. (History of convergence of the parallel fully automatic hp adaptivity for heat transport problem inside battery cross-section. Horizontal axis denotes logarithm of the number of degrees of freedom, vertical axis denotes logarithm of relative error in energy norm).



Rysunek 22. Siatka optymalna na której rozwiązanie problemu obliczenia rozkładu ciepła we wnętrzu baterii ma dokładność 0.1% błęd względnego w normie energetycznej, wraz z rozwiązaniem. (Optimal mesh providing solution to the problem of the heat trans-

### 6.3. Trójwymiarowy problem wzorcowy Fichera

Opis problemu przedstawiono w rozdziale "Równoległa trójwymiarowa hp adaptacja". Dokładność 1% błęd względnego w normie energetycznej uzyskano po 6 iteracjach. Skonstruowana automatycznie siatka optymalna rozdystrybuowana na 7 procesorów przedstawiona jest na rysunku 23. Na rysunku 24 przedstawiono natomiast rozwiązanie równania Laplace z dokładnością 1% na uzyskanej siatce optymalnej. Historia zbieżności dla problemu przedstawiona jest

na rysunku 25.

### 6.4. Trójwymiarowy problem obliczenia rozkładu fal elektromagnetycznych w warstwach górotworu

Problem obliczenia rozkładu fal elektromagnetycznych w warstwach górotworu związany jest z zagadnieniem lokalizacji złóż ropy naftowej (Pardo i in., 2005a; Pardo i in., 2005c). W wykonanym odwiercie umieszcza się antenę nadawczą i odbiorczą. Celem symulacji jest obliczenie fal elektromagnetycznych rejestrowanych przez antenę odbiorczą w przypadku występowania złoża ropy naftowej, patrz rysunek 26.

Obliczenia dotyczyły potencjału elek-



Rysunek 23. Siatka optymalna dostarczająca rozwiązanie z dokładnością 1% błęd względnego w normie energetycznej uzyskana po 6 iteracjach. (Optimal grid after providing solution with 1% relative error in energy norm, obtained after 6 iterations).

tromagnetycznego  $u$  takiego że pole elektromagnetyczne  $E = -\nabla u$ . Dla tzw. sformułowania DC ("Direct Current") (Pardo i in., 2005b) równanie opisujące potencjał elektromagnetyczny ma postać

$$\nabla(\delta \nabla u) = -\nabla J \quad (11)$$

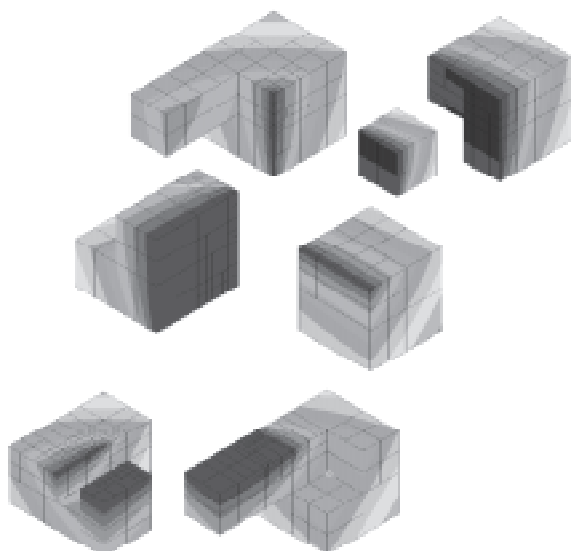
a warunki brzegowe dane są w postaci jednorodnych warunków Neumanna

$$\delta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

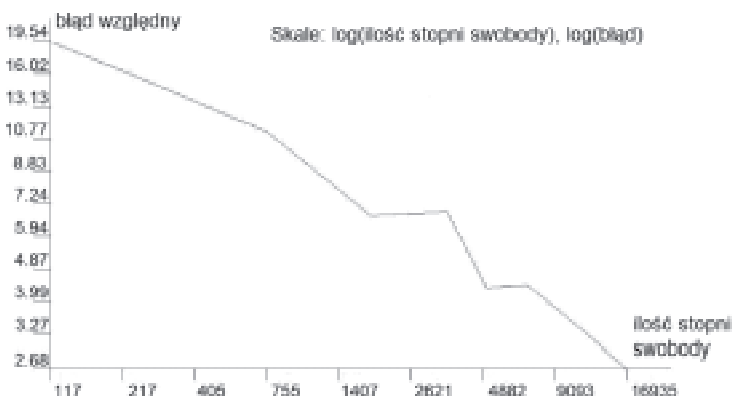
gdzie  $\delta$  to współczynnik przewodności elektrycznej a  $J$  to zadane natężenie prądu na antenie nadawczej, o którym zakładamy iż jest odpowiednio różniczkowalne.



At



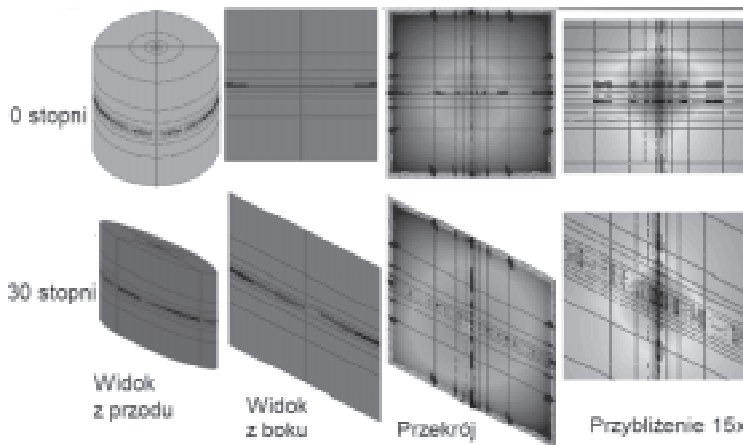
Rysunek 24. Rozwiązanie problemu Fichera z dokładnością 1% błędu względnego w normie energetycznej. (Ficher problem solution with accuracy 1% of the relative error in energy norm).



Rysunek 25. Historia zbieżności dla równoległego kodu automatycznej hp adaptacji dla problemu Fichera. Pozioma oś zawiera logarytm z liczby stopni swobody na siatce MES, pionowa oś zawiera błąd rozwiązania, procent błędu względnego w normie energetycznej. (History of convergence of the parallel fully automatic hp adaptivity for the Ficher problem. Horizontal axis denotes logarithm of the number of degrees of freedom, vertical axis denotes logarithm of relative error in energy norm).

Przeprowadzono obliczenia w obszarze cylindrycznym dla warstw ułożonych prostopadle do odwiertu, oraz dla warstw nachylonych pod różnym kątem, porównaj rysunki 27 i 28. Obszar obliczeniowy podzielony został na 7 procesorów, patrz rysunek 29. Dla każdego kąta nachylenia warstw górotworu przeprowadzono symulacje dla szeregu pozycji anten nadawczej i odbiorczej. Symulowano w ten sposób przesuwanie urządzenia pomiarowego w otworze odwiertu. Rezultaty uzyskane z pomocą równoległego kodu hp adaptacji przedstawiono na rysunku 30.

W celu przyspieszenia czasu obliczeń, do wygenerowania optymalnej siatki MES dla przypadku zerowego kąta nachylenia warstw



Rysunek 27. Cylindryczny obszar obliczeniowy wraz z rozwiązaniem dla kątów nachylenia warstw górotworu 0 i 30 stopni. (Cylindrical domain with solution for formation layers angle 0 and 30 degree).

98 m	1 Ohm-m	0.1 Ohm-m	1 Ohm-m
4 m	20 Ohm-m	0.1 Ohm-m	20 Ohm-m
98 m	1 Ohm-m	0.1 Ohm-m	1 Ohm-m
22 cm			

Rysunek 26. Współczynniki oporności dla warstw gleby, centralnej warstwy złoża ropy naftowej i odwiertu. (Resistivity coefficients for formation layers of mud, oil and borehole).

górotworu kiedy to problem staje się osiowosymetryczny zastosowano wersje kodu dwuwymiarowego.

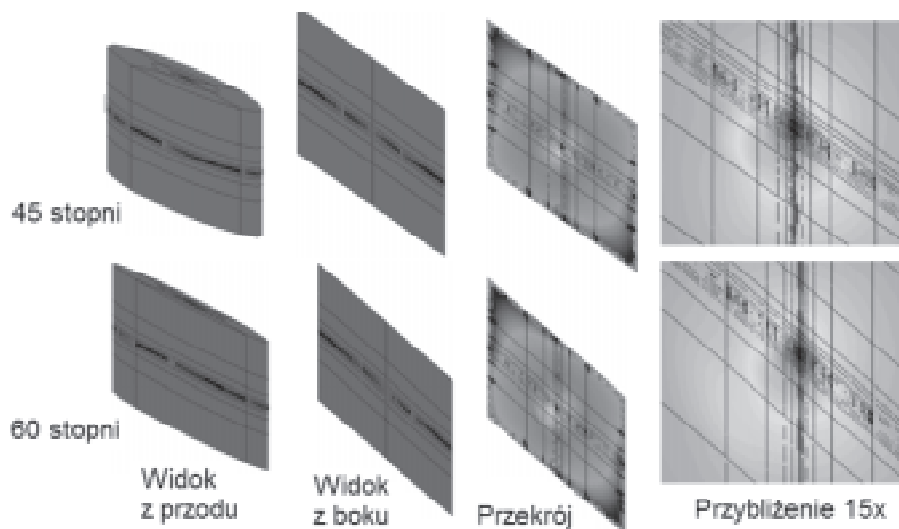
Następnie skonstruowano siatkę trójwymiarową poprzez obrót uzyskanej w taki sposób optymalnej siatki dwuwymiarowej, patrz rysunek 31. Dla przypadków nie osiowosymetrycznych, dla niezerowych kątów nachylenia warstw górotworu, siatka trójwymiarowa uzyskana została poprzez pochylenie warstw w optymalnej siatce trójwymiarowej otrzymanej dla kąta zerowego.

## 7. EFEKTYWNOŚĆ RÓWNOLEGLYCH KODÓW AUTOMATYCZNEJ HP ADAPTACJI

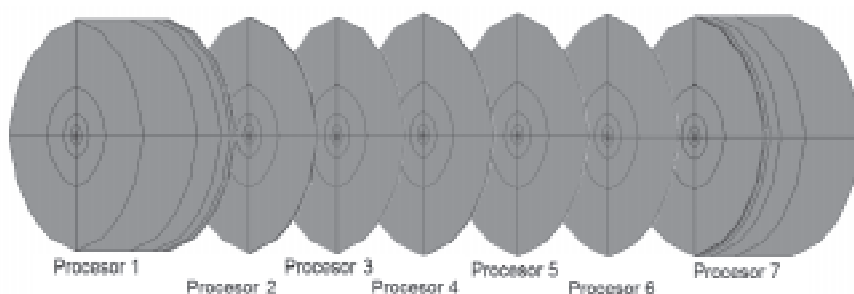
Względna efektywność  $E_r$  kodu równoległego zdefiniowana jest jako (Foster)

$$E_r = \frac{T_1}{pT_p} \quad (13)$$





Rysunek 28. Cylindryczny obszar obliczeniowy wraz z rozwiązaniem dla kątów nachylenia warstw górotworu 45 i 60 stopni. (Cylindrical domain with solution for formation layers angle 45 and 60 degree).



Rysunek 29. Obszar obliczeniowy podzielony na 7 procesorów. (Computational domain split-  
ted into 7 processors).

gdzie  $T_1$  to czas wykonania kodu równoległego na jednym procesorze,  $p$  to liczba procesorów na których wykonano kod równoległy w czasie  $T_p$ . Względne przyspieszenie  $S_r$  natomiast zdefiniowane jest jako (Foster)

$$S_r = pE_r = \frac{T_1}{T_p} \quad (14)$$

Równoległy kod automatycznej *hp* adaptacji osiąga tym lepsze względne przyspieszenie i względną efektywność im bardziej złożony jest rozważany problem. Jest to związane z faktem iż podział obszaru obliczeniowego wykonywany jest na poziomie elementów siatki początkowej. Dla problemów zdefiniowanych w obszarze o prostej geometrii posiadających mało obszarów występowania osobliwości dla których adaptacja konieczna jest jedynie wewnątrz kilku elementów siatki początkowej, kody równoległe nie dadzą dobrej efektywności, ale zastosowanie kodów równoległych dla takich problemów nie jest umotywowane.

Powód dla którego automatyczne kody *hp* adaptacji tracą efektywność dla prostych problemów jest następujący. Załóżmy że siatka początkowa składa się

z 10 elementów skończonych, i że adaptacje wykonają się jedynie w pierwszym elemencie. Wówczas obciążenie na pierwszym elemencie może być o rząd większe niż obciążenie na każdym innym elemencie. W takim przypadku optymalny podział obciążenia na procesory jest następujący: pierwszy element skończony zostaje przypisany do procesora 1, pozostałe elementy skończone zostają przypisane do procesora 2, a wszystkie pozostałe procesory są bezczynne, co zostało zaprezentowane na rysunku 32.

Równoległy kod automatycznej *hp* adaptacji wykazuje lepszą efektywność niż kod sekwencyjny w przypadku większych problemów zawierających dużo osobliwości.

Dla problemu obliczenia rozkładu ciepła we wnętrzu baterii równoległy kod automatycznej *hp* adaptacji osiągnął względną efektywność rzędu 0.6 i względne przyspieszenie rzędu 9 dla 16 procesorów, patrz rysunek 33. Użycie większej ilości procesorów dla tego problemu nie jest uzasadnione,

ponieważ obszar osobliwości pokryty jest 16 elementami siatki początkowej.

Dla problemu Fichera równoległy kod automatycznej *hp* adaptacji osiągnął względną efektywność rzędu 0.85 i względne przyspieszenie rzędu 3.5 dla 4 procesorów, patrz rysunek 34. Użycie większej ilości procesorów dla tego problemu nie jest uzasadnione, ponieważ w obszarze występuje tylko jedna centralna osobliwość.

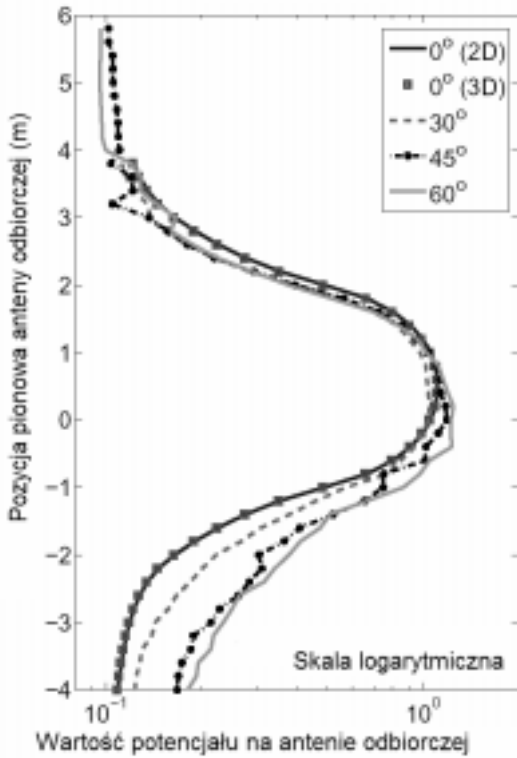
Dla problemu obliczenia rozkładu fal elektromagnetycznych w warstwach górotworu równoległy kod osiągnął względną efektywność rzędu 0.85 i względne przyspieszenie rzędu 6.8 dla 8 procesorów, patrz rys. 35.

## 7. ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY ILOŚCIĄ OSOBLIWOŚCI W ROZWAŻANYM PROBLEMIE A ILOŚCIĄ PROCESORÓW DLA KTÓREJ KOD RÓWNOLEGLY UZYSKA MAKSYMALNE PRZYSPIESZENIE

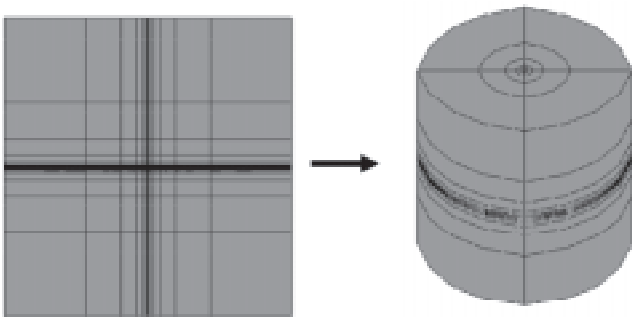
W przypadku obliczeń równoległych kodu automatycznej *hp* adaptacji można przewidzieć liczbę pro-



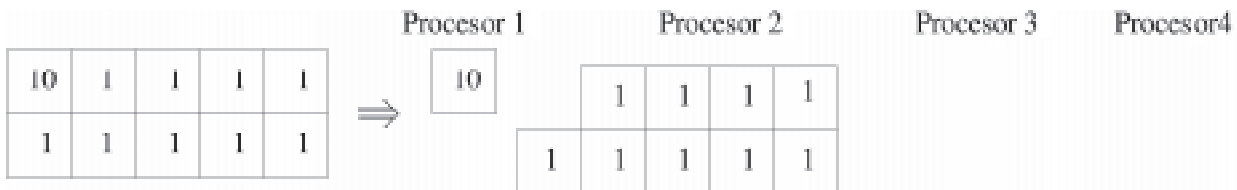




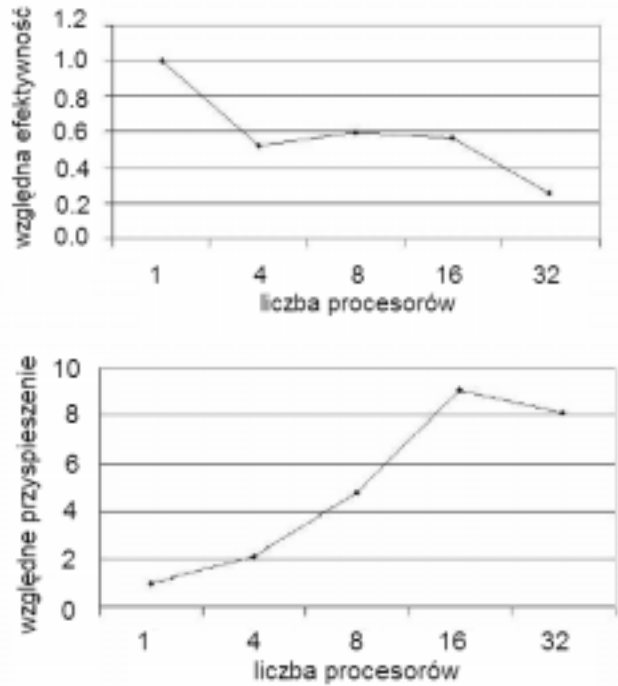
Rysunek 30. Wartości na antenie odbiorczej dla różnych położenia anteny względem warstwy złoża ropy naftowej. Różne krzywe odpowiadają różnym kątom nachylenia warstw górotworu. Pozioma oś oznacza wartość potencjału pola elektromagnetycznego, pionowa oś oznacza położenie anteny odbiorczej. (Values at receiver antenna for different position of the antenna with respect to the oil layer. Different curves are associated with different angles of formation layers. Horizontal axis denotes potential at receiver antenna, vertical axis denotes positions of the antenna).



Rysunek 31. Konstrukcja optymalnej siatki trójwymiarowej na podstawie otrzymanej optymalnej siatki dwuwymiarowej (Construction of optimal 3D mesh based on full revolution of optimal 2D mesh).



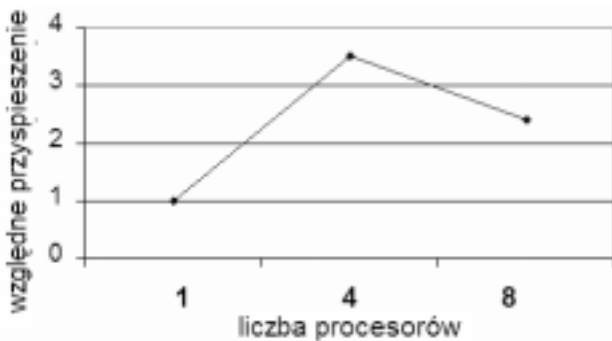
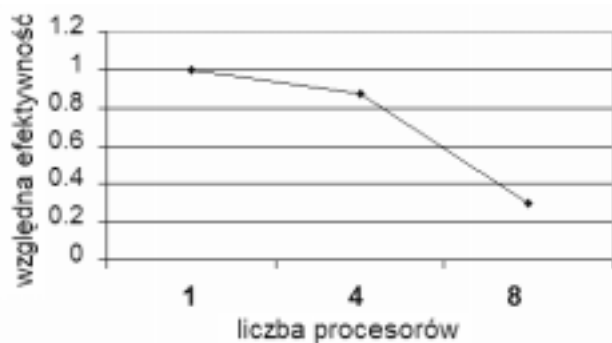
Rysunek 32. Optymalny podział obciążeń dla prostego problemu w którym pierwszy element skończony jest obciążony o rząd bardziej niż wszystkie pozostałe elementy. (Optimal load balance for a simple case where first finite element has load one order of magnitude higher than overall load for all other finite elements).



Rysunek 33. Względna efektywność i przyspieszenie dla problemu obliczenia rozkładu ciepła we wnętrzu baterii. (Relative efficiency and speedup for the battery cross-section problem).

cesorów na której kod równoległy uzyska maksymalne przyspieszenie, bez konieczności wykonywania pomiarów dla liczby procesorów zmieniających się o jeden. Równoważenie obciążeń w kodzie równoległym opiera się na podziale obszaru obliczeniowego na podobszary na poziomie elementów siatki początkowej. Decyzje o podziałach siatki MES na podobszary podejmowane są na podstawie szacowania obciążeń na elementach siatki początkowej. Obciążenia na elementach siatki początkowej szacowane są jako suma obciążeń wszystkich elementów aktywnych znajdujących się w obrębie elementu siatki początkowej. Obciążenie elementu aktywnego szacowane są jako  $p^7$  gdzie  $p$  oznacza stopień aproksymacji we wnętrzu elementu. W pierwszej iteracji obciążenie na każdym elemencie siatki początkowej jest takie samo, ponieważ żaden element siatki początkowej nie został jeszcze złamany, i żaden rząd aproksymacji wielomianowej nie został jeszcze zmodyfikowany. Podczas iteracji kodu automatycznej  $hp$  adaptacji pewne





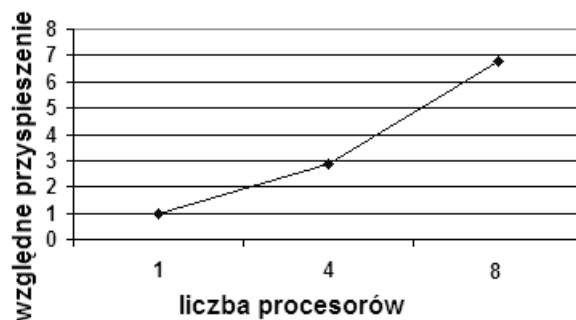
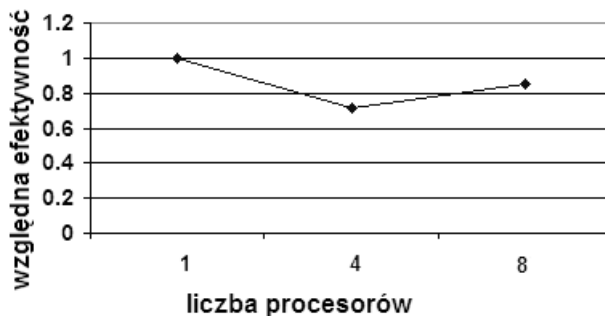
Rysunek 34. Względna efektywność i przyspieszenie dla problemu Fichera. (Relative efficiency and speedup for the Fichera problem).



Rysunek 36. 16 elementów siatki początkowej złożonej ze 128 elementów, pokrywających obszary największych osobliwości. (16 initial mesh elements covering areas with strongest singularities, from initial mesh having 128 elements).

elementy skończone są łamane na nowe elementy oraz modyfikowany jest rząd aproksymacji wielomianowej w niektórych elementach. Największe modyfikacje siatki odbywają się w okolicach występowania osobliwości numerycznych. Oznacza to że elementy siatki początkowej pokrywające obszary występowania osobliwości będą najbardziej dzielone i stopień aproksymacji wielomianowej na tych elementach będzie największy. Sumaryczne obciążenie po wszystkich elementach aktywnych w elementach siatki początkowej pokrywających obszar osobliwości będzie więc dużo wyższe niż obciążenie na pozostałych elementach.

Oznacza to że liczbę procesorów pozwalających uzyskać maksymalne

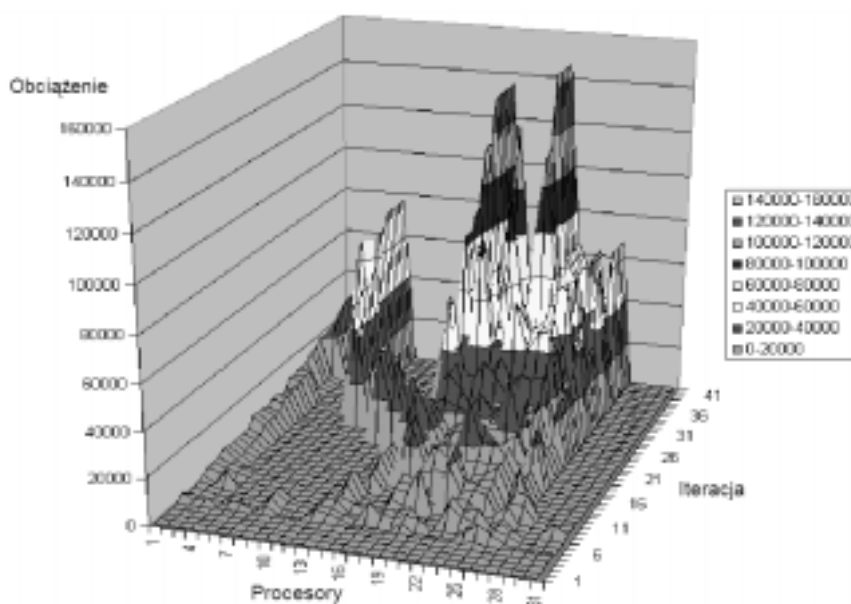


Rysunek 35. Względna efektywność i przyspieszenie dla problemu obliczenia rozkładu fal elektromagnetycznych w warstwach górotworu. (Relative efficiency and speedup for the problem of electromagnetic waves propagation inside formation layers).

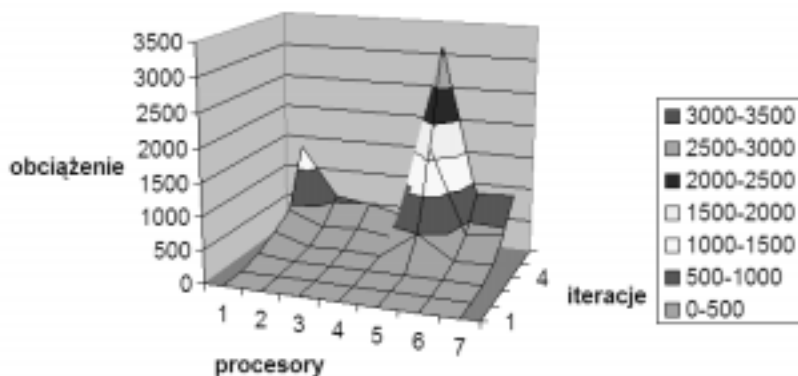
przyspieszenie określić można szacując koszt obliczeniowy na poszczególnych elementach siatki początkowej w poszczególnych iteracjach automatycznej *hp* adaptacji.

Na przykład, w dwuwymiarowym problemie obliczenia anizotropowego rozkładu ciepła we wnętrzu baterii, występuje 16 elementów siatki początkowej które pokrywają obszary występowania osobliwości, patrz rysunek 36.

Po kilku początkowych iteracjach obciążenie na 16 procesorach zawierających te elementy siatki początkowej



Rysunek 37. Obciążenie na poszczególnych podobszarach w poszczególnych iteracjach automatycznej *hp* adaptacji (Load on particular sub-domains in particular iterations of automatic *hp* adaptivity).



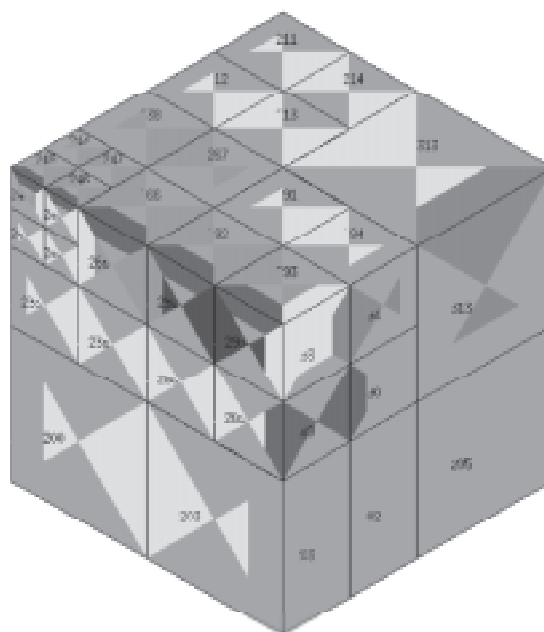
Rysunek 38. Obciążenie procesorów w poszczególnych iteracjach automatycznej hp adaptacji dla problemu Fichera (Processor's load in particular iterations of automatic hp adaptivity for the Fichera problem).

kowej gwałtownie rośnie, patrz rysunek 37, i staje się o kilka rzędów wielkości wyższe niż obciążenie na wszystkich pozostałych elementach razem wziętych. Praktycznie oznacza to iż po kilku początkowych iteracjach pracuje jedynie 16 procesorów, ponieważ biblioteka ZOLTAN przypisuje wszystkie pozostałe elementy do najmniej obciążonego procesora spośród 16 najbardziej obciążonych procesorów, i opróżnia zupełnie pozostałe podobszary z elementów skończonych. Oznacza to że najlepsze przyspieszenie uzyskamy dla 16 procesorów. Nie ma więc za bardzo sensu badać przyspieszenia dla większej lub mniejszej ilości procesorów.

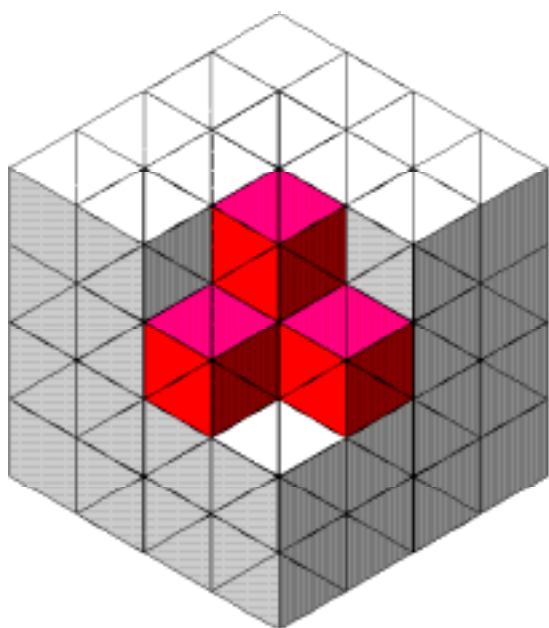
W przypadku problemu Fichera uruchomionego na 8 procesorach, na 4 procesorach od 4 iteracji występuje obciążenie większe od obciążenia na pozostałych procesorach, patrz rysunek 38, przy czym jeden

procesor jest najbardziej obciążony. Wskazać można 4 elementy siatki początkowej pokrywające obszar występowania największych adaptacji siatki związanych z centralną osobliwością, patrz rysunek 39. Jeden z tych elementów jest najbardziej adaptowany, patrz rysunek 40. Oznacza to że maksymalne przyspieszenie uzyskać można stosując liczbę procesorów odpowiadającą ilości najbardziej adaptowanych elementów siatki początkowej, a więc 4 procesory. Jeśli zastosujemy gęstszą siatkę początkową, to nie poprawi to skalowalności, ponieważ po kilku iteracjach znowu zaczną dominować 4 elementy

zlokalizowane wokół punktowej osobliwości, a zwiększy to jedynie rozmiar generowanych siatek.



Rysunek 40. Najbardziej adaptowany element siatki początkowej (Most adapted initial mesh element).



Rysunek 39. 4 elementy skończone pokrywające obszar największych adaptacji związanych z centralną osobliwością (4 finite elements covering area with strongest adaptivity associated with central singularity).

## 8. PODSUMOWANIE

- Kody hp adaptacji automatycznie konstruuja siatkę metody elementów skończonych dostarczającą rozwiązanie z ogromną dokładnością niemożliwą do uzyskania innymi metodami.
- Metody adaptacji siatki podzielić można na metody h adaptacji, w których powstają nowe elementy skończone poprzez podział istniejących elementów skończonych, na metody p adaptacji w których modyfikowany jest stopień aproksymacji wielomianowej na elementach, oraz na hp adaptacje stanowiącą połączenie obydwu metod. Metody te mogą różnić się rodzajem użytych elementów skończonych, a co za tym idzie sposobem podziału ele-



mentów i rodzajami funkcji kształtu zaimplementowanych w węzłach elementów. Metody adaptacji mogą również różnić się sposobem szacowania błędu rozwiązania na aktualnej siatce. Automatem hp adaptacja opisana w tej pracy pracuje na elementach prostokątnych w dwóch wymiarach i prostopadłościennych w trzech wymiarach, wspiera  $h$  adaptacje w których elementy mogą zostać dzielone na 2, 4 lub 8 nowych elementów w dowolnym kierunku, używa hierarchicznych funkcji kształtu Lagrange'a, a decyzje o rodzaju adaptacji siatki opiera na lokalnym szacowaniu błędu możliwych scenariuszy adaptacji elementów z wykorzystaniem mechanizmu "projection based interpolation" (Demkowicz, 2002a; Demkowicz, 2002b). Automatem hp adaptacja jest uniwersalną strategią adaptacji siatki dwu i trójwymiarowej, którą zastosować można na dowolnej siatce strukturalnej lub niestrukturalnej. Istnieje wersja kodu automatycznej hp adaptacji (Demkowicz i in., 2002a) zaimplementowana na dwuwymiarowych siatkach niestrukturalnych składających się z elementów trójkątnych i prostokątnych. Możliwe jest również zaimplementowanie algorytmu na niestrukturalnej siatce trójwymiarowej z użyciem elementów prostopadłościennych, czworościennych oraz pięciociennych, jest to jednak zadanie bardzo skomplikowane, między innymi ze względu na problemy implementacji  $p$  adaptacji na elementach pięciociennych. Zastosowane przez nas izoparametryczne elementy prostopadłościenne pozwalają odwzorować geometrię praktycznie każdego obszaru obliczeniowego. Na podstawie serii wykonanych eksperymentów stwierdzić można że metoda hp adaptacji jest jedyną metodą adaptacji która zbiega się eksponentalnie. Podobne zachowanie obserwujemy na dwuwymiarowych siatkach niestrukturalnych (Demkowicz i in., 2002a). Sądzymy iż metoda ta zachowa również swoją eksponentalną zbieżność na trójwymiarowych siatkach niestrukturalnych. Eksponentalna zbieżność metody hp adaptacji jest bowiem potwierdzona teoretycznie (Schwab, 1998).

- Równoległe kody automatycznej  $hp$  adaptacji pozwalają efektywnie i dokładnie rozwiązywać duże problemy z dużą ilością osobliwości dla których kody sekwencyjne nie są wystarczające. Algorytmy sekwencyjne nie są wystarczające dla dużych problemów z dużą liczbą osobliwości, ponieważ siatki elementów skończonych tworzone dla tych problemów przez kody automatycznej  $hp$  adaptacji zawierać mogą tak duże liczby stopni swobody iż nie będzie możliwe rozwiązanie tych problemu z pomocą maszyny sekwencyjnej, i konieczne bę-

dzie zastosowanie maszyn równoległych. Dla niektórych bardzo dużych problemów rozwiązanie ich z porządną dokładnością może w ogóle nie być możliwe z pomocą innych metod adaptacji siatki, ponieważ liczba stopni swobody wygenerowana z pomocą innych metod adaptacji może być za duża nawet dla dostępnych aktualnie maszyn równoległych. Przykładem takich problemów mogą być zagadnienia związane z obliczeniami rozkładu pola elektromagnetycznego w otworze odwiertu w którym zastosowano metalową ochronę otworu. W problemie tym oporność właściwa metalowej ochrony otworu odwiertu jest o dziesięć rzędów wielkości większy niż oporność właściwa warstw gleby. Rozwiązanie takich problemów jest możliwe tylko z pomocą równoległych kodów automatycznej hp adaptacji (Pardo, 2005c).

- Opracowana strategia automatycznej  $hp$  adaptacji nie zależy od rodzaju rozważanego problemu. Aktualnie dwuwymiarowa wersja sekwencyjna kodu pracuje dla problemów obliczania rozkładu ciepła (równanie Laplace'a), równań liniowej sprężystości, dla problemów akustyki, problemów obliczania rozkładu fal elektromagnetycznych w ośrodku ciągłym (równania Maxwella). Wersja trójwymiarowa pracuje dla równań Laplace'a, oraz dla równania liniowej sprężystości. Prowadzone są prace nad rozszerzeniem wersji o równania Maxwella (Kurtz, 2005). Kody równoległe pracują dla równań Laplace'a, prowadzone są prace nad rozszerzeniem kodów o równania liniowej sprężystości (Paszyński i in., 2005b).

## LITERATURA

- Babuška, I., 1981, The  $p$ -version of the finite element method, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 18, 515-545 (z B. A. Szabo and I. N. Katz).
- Babuška, I., Guo, B., 1986a, The  $hp$ -version of the finite element method, Part I: The basic approximation results, *Comput. Mech.*, 1, 21-41.
- Babuška, I., Guo, B., 1986b, The  $hp$ -version of the finite element method, Part II: General results and applications, *Comput. Mech.*, 1, 203-220.
- Chang, Y.C., Demkowicz, L., 1995, Scattering on a spherical shell. Comparison of 3-D elasticity and Kirchhoff shell theory results, *CAMES*, 2, 207-229.
- Demkowicz, L., 2002a, 2D  $hp$ -Adaptive Finite Element Package (2Dhp90) Version 2.0, *ICES Report 02-06*.
- Demkowicz, L., Pardo, D., Rachowicz, W., 2002b, 3D  $hp$ -Adaptive Finite Element Package (3Dhp90) Version 2.0, *ICES Report 02-24*.
- Demkowicz, L., 2004, Projection-based interpolation. *ICES Report 04-03*.
- Demkowicz, L., 2005, *Computing with  $hp$  Adaptive Finite Elements*, part I., CRC Press.
- Devine, K.D., Henrickson, B., Boman, E.G., St. John, M.M., Vaughan, C., 1999, ZOLTAN: A dynamic load-balancing li-

- brary for parallel applications - user's guide, *Tech Report SAND99-1377*, Sandia National Laboratories, [www.sandia.gov/zoltan](http://www.sandia.gov/zoltan).
- Dong, X., Demkowicz, L., 2002, Geometrical Modeling Package. Version 2.0, *TICAM-Report 02-30*.
- Dong, X., 2005, *Control of geometry error in hp Finite Element (FE) simulations of electromagnetic (EM) waves*, Dissertation, The University of Texas, Austin.
- Foster, I. *Designing and Building Parallel Programs*, <http://www-unix.mcs.aml.gov/dbpp>.
- Geng, P., Oden, T.J., van de Geijn, R.A., 1997, A Parallel Multi-frontal Algorithm and Its Implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149, 289-301.
- Kurtz, J., 2005, *Fully Automatic hp-Adaptivity for Acoustic and Electromagnetic Scattering in Three Dimensions*, Dissertation Proposal, The University of Texas, Austin.
- Pardo, D., Demkowicz, L., Torres-Verdin, C., Paszyński, M., 2005a, Simulation of Resistivity Logging-While-Drilling (LWD) Measurements Using a Self-Adaptive Goal-Oriented hp-Finite Element Method, zgłoszone do *SIAM J. on Applied Mathematics*.
- Pardo, D., Demkowicz, L., Torres-Verdin, C., Paszyński, M., 2005b, A Self-Adaptive Goal-Oriented hp Finite Element Method with Electromagnetic Applications. Part II: Electrodynamics., zgłoszone do *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, special issue in honor of Prof. Ivo Babuska.
- Pardo, D., Paszyński, M., Demkowicz, L., Torres-Verdin, C., 2005c, Self-Adaptive Goal-Oriented hp-Finite Element Simulations of (1) Axisymmetric Borehole Acoustics and (2) 3D Resistivity Logging Instruments, *Joint Research Consortium on Formation Evaluation*, August 17, 2005, The University of Texas, Austin.
- Paszyński, M., Demkowicz, L., 2005a, Parallel Fully Automatic hp-Adaptive 3D Finite Element Package, *8th U.S. National Congress on Computational Mechanics*, Austin, Texas; *ICES Report 05-33*; specjalne wydanie *Engineering with Computers* on frameworks/integrated software infrastructures for scalable scientific and engineering applications.
- Paszyński, M., Romkes, A., Collister, E., Meiring, J., Demkowicz, L., Willson, C.G., 2005b, On the Modeling of Step-and-Flash Imprint Lithography using Molecular Statics Models, *ICES Report 05-38*, praca zgłoszona do *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*.
- Paszyński, M., Demkowicz, L., Pardo, D., 2005c, Verification of Goal-Oriented hp -Adaptivity, *ICES Report 05-06*, przyjęty do druku w *Computers and Mathematics with Applications*, 50, 1395-1404.
- Paszyński, M., Kurtz, J., Demkowicz, L., 2006, Parallel Fully Automatic hp-Adaptive 2D Finite Element Package, *ICES Report 04-07*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 711-741.
- Patra, A.K., 1995, *Parallel hp Adaptive Finite Element Analysis of Viscous Incompressible Fluid Problems*, Praca doktorska, The University of Texas, Austin.
- Remacle, J.F., Xiangrong, Li, Shephard, M.S, Flaherty, J.E., 2005, Anisotropic Adaptive Simulations of Transient Flows using Discontinuous Galerkin Methods, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 62, 899-923.
- Rachowicz, W., Pardo, D, Demkowicz, L., 2004, Fully Automatic hp-Adaptivity in Three Dimensions, *ICES Report 04-22*.
- Schwab, Ch., 1998, *P and HP Finite Element Methods*, Oxford University Press.

Artykuł otrzymano w dniu ....2005 r.

