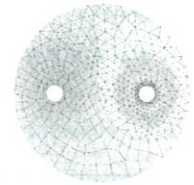




Wydawnictwo
Naukowe
AKAPIT



SPEKTRALNA METODA GALERKINA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ POISSONA W DZIEDZINIE OSIOWOSYMETRYCZNEJ

BOGUSŁAW BOŻEK, DANIEL DELIMATA

SPECTRAL GALERKIN METHOD FOR SOLVING POISSON EQUATION IN AXISYMMETRIC DOMAIN

Abstract

This work presents spectral Galerkin method for solving Poisson equation in axisymmetric domain. Computational equations are introduced in the way that allow easy computer programming. Paper contains some calculation examples which use this method.

STRESZCZENIE

W pracy zostały wyprowadzone efektywne wzory obliczeniowe spektralnej metody Galerkina rozwiązywania równania Poissona określonego w walcu. Zostały zaprezentowane wyniki przykładowych obliczeń programem napisanym w oparciu o wyprowadzone wzory.

WSTĘP

Jedną z częściej stosowanych metod przybliżonych rozwiązywania równań różniczkowych, w tym równania Poissona, jest metoda Galerkina, przy czym zazwyczaj poszukuje się rozwiązania przybliżonego w skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej rozpiętej na splinach stopnia pierwszego indukowanych przez triangulację obszaru Ω , w którym jest określone równanie. Gdy mamy do czynienia z obszarem cylin-

drycznym wygodnie jest zastosować metodę spektralną, w której poszukuje się rozwiązania przybliżonego w przestrzeni wielomianów, przy czym jako bazę tej przestrzeni wybiera się wielomiany ortogonalne. Metodzie spektralnej w zastosowaniu do przypadku obrotowej dziedziny jest w całości poświęcona książka Bernardi i in. (1999). Są w niej zebrane wyniki stanowiące teoretyczną podstawę tej metody w odniesieniu do równań różniczkowych różnych typów, w tym własności obrotowych przestrzeni Sobolewa, teoretyczne oszacowania błędów metody i twierdzenia o jej zbieżności w stosownych przestrzeniach funkcyjnych.

W niniejszej pracy zostały wyprowadzone efektywne wzory obliczeniowe spektralnej metody Galerkina rozwiązywania równania Poissona określonego w walcu umożliwiające jej komputerową implementację. Zostały zaprezentowane wyniki przykładowych obliczeń programem napisanym w oparciu o wyprowadzone wzory.

1. ZAGADNIENIE DIRICHLETA DLA RÓWNIANIA POISSONA W PRZYPADKU OBROTOWYM

1.1. Równanie Poissona

Rozważamy problem Dirichleta dla obrotowo niezmienniczego równania Poissona postaci:

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u - \frac{1}{r} \partial_r u - \partial_z^2 u = f & \text{w } \omega, \\ u = b & \text{na } \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} u &= u(r, z), \quad f = f(r, z), \quad b = b(r, z), \\ \omega &:= \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < 1 \text{ i } -1 < z < 1\}, \\ \gamma_0 &:= \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : r = 0 \text{ i } -1 < z < 1\}, \\ \gamma &:= \partial\omega \setminus \gamma_0. \end{aligned}$$

1.2. Postać wariacyjna

Dowodzi się (Bernardi i in. 1999), że problem (1) jest równoważny znalezieniu takiej funkcji $u \in H_1^1(\omega)$, że:

$$\begin{cases} \forall v \in H_1^1(\omega), & u - b \in H_1^1(\omega), \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\omega} (\partial_r u \partial_r v + \partial_z u \partial_z v)(r, z) r \, dr \, dz, \\ \langle f, v \rangle &= \int_{\omega} f(r, z) \cdot v(r, z) r \, dr \, dz, \\ H_1^1(\omega) &= \{v \in L_1^2(\omega) : \partial_r v \in L_1^2(\omega) \\ &\quad \text{oraz } \partial_z v \in L_1^2(\omega)\}, \\ L_1^2(\omega) &= \{v : \omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\omega} |v|^2 r \, dr \, dz < +\infty \\ &\quad \text{i } v \text{ mierzalna}\}, \\ H_1^1(\omega) &= \{v \in H_1^1(\omega) : v = 0 \text{ na } \gamma\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Postać (2) nazywamy postacią wariacyjną. Jej dyskretną wersję otrzymujemy poprzez zastąpienie występujących w niej nieskończenie wymiarowych przestrzeni, skończenie wymiarowymi. Zagadnieniu ich konstrukcji a także wyboru odpowiednich baz poświęcony jest następny punkt.

2. WIELOMIANY ORTOGONALNE

2.1. Wielomiany Legendre'a

Wielomiany Legendre'a (patrz np. Abramowitz i Stegun, 1972) są zdefiniowane na przedziale $\Lambda = [-1, 1]$ wzorami;

$$L_0(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dowodzi się, że spełniają one szereg własności, a między innymi:

- wielomiany L_n mają parzystość zgodną ze swoimi stopniami (tzn. dla n parzystych są parzyste, dla n nieparzystych nieparzyste)
- każdy wielomian L_n spełnia równanie różniczkowe

$$((1 - \zeta^2)L_n')' + n(n+1)L_n = 0, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

- każdy wielomian L_n , gdzie $n \geq 1$, spełnia równanie

$$(2n+1)L_n = L_{n+1}' - L_{n-1}', \quad (5)$$

- norma wielomianu L_n , gdzie $n \geq 0$ w przestrzeni $L^2(\Lambda)$ jest dana wzorem

$$\int_{-1}^1 L_n^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

- wielomiany L_n można obliczyć korzystając z formuły rekurencyjnej

$$\begin{cases} L_0(\zeta) = 1, \quad L_1(\zeta) = \zeta, \\ L_{n+1}(\zeta) = \frac{2n+1}{n+1} \zeta L_n(\zeta) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(\zeta), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- wielomiany L_n przyjmują w punktach 1 i -1 wartości:

$$L_n(-1) = (-1)^n, \quad L_n(1) = 1.$$

2.2. Wielomiany M

Definiujemy rodzinę wielomianów:

$$M_n(\zeta) = \frac{L_n(\zeta) + L_{n+1}(\zeta)}{1 + \zeta} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

Ponieważ $L_n(-1) + L_{n+1}(-1) = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$, czyli -1 jest miejscem zerowym licznika, a co za tym idzie, licznik jest podzielny przez $(1 + \zeta)$, więc M_n są wielomianami.

Twierdzenie 2.1. *Wielomiany $M_n(t)$ tworzą bazę ortogonalną w przestrzeni wielomianów określonych na przedziale Λ z wagą $(1 + t)$.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że dla $n \neq m$ zachodzi $\int_{-1}^1 M_n(t)M_m(t)(1+t) dt = 0$. Ze względu na symetrię, dla ustalenia uwagi możemy przyjąć, że $n < m$. Zauważmy, że $M_n(t)M_m(t)(1+t) = (L_m(t) + L_{m+1}(t))M_n(t)$, stąd $\int_{-1}^1 M_n(t)M_m(t)(1+t) dt = \int_{-1}^1 L_m(t)M_n(t) dt + \int_{-1}^1 L_{m+1}(t)M_n(t) dt$. Każdy wielomian niższego stopnia niż m jest wielomianem ortogonalnym do $L_m(t)$ z wagą 1. W szczególności takim wielomianem jest M_n , a zatem $\int_{-1}^1 L_m(t)M_n(t) dt = 0$, oraz $\int_{-1}^1 L_{m+1}(t)M_n(t) dt = 0$, co wobec wzoru otrzymanego powyżej, daje

$$\int_{-1}^1 M_n(t)M_m(t)(1+t) dt = 0 \quad \text{dla } n \neq m.$$

Pozostało jeszcze wykazać, że $\int_{-1}^1 (M_n(t))^2 (1+t) dt \geq 0$. Wynika to wprost z faktu, że $(M_n(t))^2 \geq 0$ i $1+t \geq 0$ dla $t \in (-1, 1)$. ■

Podobnie jak dla wielomianów Legendre'a przytaczamy tu bez dowodów kilka lematów opisujących własności wielomianów M_n (Bernardi i in. 1999).

Lemat 2.1. *Każdy wielomian M_n , gdzie $n \geq 0$ spełnia równanie różniczkowe*

$$((1 + \zeta)^2(1 - \zeta)M_n')' + n(n + 2)(1 + \zeta)M_n = 0. \quad (7)$$

Lemat 2.2. *Wielomiany M_n spełniają następujące formuły rekurencyjne:*

$$\begin{cases} M_0(\zeta) = 1, \\ M_n(\zeta) = \frac{2n+1}{n+1}L_n(\zeta) - \frac{n}{n+1}M_{n-1}(\zeta), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} M_0(\zeta) = 1, & M_1(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta - 1), \\ M_n(\zeta) = \frac{2n+1}{n+1}\left(\zeta - \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)M_{n-1}(\zeta) \\ \quad - \frac{(2n+1)(n-1)}{(2n-1)(n+1)}M_{n-2}(\zeta), \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (9)$$

Lemat 2.3. *Każdy wielomian M_n , gdzie $n \geq 0$ spełnia związek*

$$\int_{-1}^1 M_n^2(\zeta)(1 + \zeta)d\zeta = \frac{2}{n+1}. \quad (10)$$

Wprowadzamy następujące przestrzenie wielomianów:

- $\mathbb{P}_n(\omega)$ — zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n zmiennych r, z ,
- $\mathbb{P}_n^0(\omega)$ — zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n zmiennych r, z , które zerują się na $\partial\omega$,
- $\mathbb{P}_n^\circ(\omega)$ — zbiór wielomianów stopnia nie większego niż n zmiennych r, z , które zerują się na γ .

Uwaga 2.1. *Niech $N \in \mathbb{N}$ będzie ustalone. Wielomiany $M_m(2r - 1)L_n(z)$:*

- dla $0 \leq m, n \leq N$ tworzą bazę ortogonalną $\mathbb{P}_n(\omega)$,
- dla $1 \leq m, n \leq N - 1$ tworzą bazę ortogonalną $\mathbb{P}_n^0(\omega)$,
- dla $0 \leq m \leq N - 1$ oraz $1 \leq m \leq N - 1$ tworzą bazę ortogonalną $\mathbb{P}_n^\circ(\omega)$.

Przestrzeń dyskretna $\mathbb{P}_n^\circ(\omega)$ stanowi w metodzie spektralnej aproksymację przestrzeni Sobolewa $H_{1\circ}^1(\omega)$.

3. METODA SPEKTRALNA

3.1. Kwadratury Gaussa-Lobatto

Zacniemy od klasycznej kwadratury Gaussa-Lobatto (patrz (Gautschi 1999), lub (Bernardi i in. 1999)) bazującej na wielomianach Legendre'a L_n .

Twierdzenie 3.1 (formuła Legendre'a Gaussa-Lobatto). *Niech $\xi_0 = -1$ i $\xi_N = 1$. Istnieje dokładnie jeden układ $N - 1$ węzłów ξ_j , $j \in$*

$\{1, 2, \dots, N - 1\}$, $\xi_j \in (-1, 1)$ oraz $N + 1$ liczb ϱ_j , $0 \leq j \leq N$ takich, że

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \int_{-1}^1 \Phi(\xi)d\xi = \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j)\varrho_j. \quad (11)$$

Liczby ξ_j , $1 \leq j \leq N - 1$ są kolejnymi zerami wielomianu L_N' , natomiast ϱ_j , $0 \leq j \leq N$ są dodatnie i dane wzorem

$$\varrho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (12)$$

Dla miary $(1 + \zeta)d\zeta$ można podać analogiczną formułę bazującą na przedstawionych w poprzednim rozdziale wielomianach M . Prawdziwe jest następujące twierdzenie (Bernardi i in. 1999):

Twierdzenie 3.2 (formuła Gaussa-Lobatto dla miary $(1 + \zeta)d\zeta$). *Niech $\zeta_0 = -1$ oraz $\zeta_N = 1$. Istnieje dokładnie jeden układ $N - 1$ węzłów ζ_j , $1 \leq j \leq N - 1$, $\zeta_j \in (-1, 1)$ oraz $N + 1$ liczb σ_j , $0 \leq j \leq N$ takich, że*

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda) : \int_{-1}^1 \Phi(\zeta)(1 + \zeta)d\zeta = \sum_{j=0}^N \Phi(\zeta_j)\sigma_j. \quad (13)$$

Liczby ζ_j , $1 \leq j \leq N - 1$ są zerami M_N' , natomiast σ_j , $0 \leq j \leq N$ są dodatnie i dane wzorami

$$\sigma_0 = \frac{8}{N(N+2)M_N^2(-1)}, \quad (14)$$

$$\sigma_j = \frac{4}{N(N+2)M_N^2(\zeta_j)}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (15)$$

3.2. Dyskretnie przestrzenie wielomianów

Niech $r_i = \frac{1+\zeta_i}{2}$, $0 \leq i \leq N$. Definiujemy siatkę węzłów dyskretyzacji na ω :

$$\Sigma_N = \{(r_i, \xi_j) : 0 \leq i, j \leq N\},$$

gdzie ξ_i są węzłami zdefiniowanymi w twierdzeniu 3.1, a ζ_i są węzłami zdefiniowanymi w twierdzeniu 3.2.

Wprowadzamy iloczyn skalarny dla funkcji u i v dwóch zmiennych

$$(u, v)_{rN} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u(r_i, \xi_j)v(r_i, \xi_j)\sigma_i\varrho_j, \quad (16)$$

gdzie σ_i , ϱ_j są zdefiniowane odpowiednio wzorami (12) i (14)

Rozwiązaniem przybliżonym problemu wariacyjnego (2) (w sensie metody spektralnej) nazywamy wielomian $u_N \in \mathbb{P}_N(\omega)$ taki, że:

$$\begin{cases} u_N - \mathcal{I}_N b \in \mathbb{P}_N^\circ(\omega), \\ \forall v_N \in \mathbb{P}_N^\circ(\omega) : a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_{rN}, \end{cases} \quad (17)$$

gdzie

$$a_N(u_N, v_N) = (\partial_r u_N, \partial_r v_N)_{rN} + (\partial_z u_N, \partial_z v_N)_{rN}, \quad (18)$$

natomiast $\mathcal{I}_N = i_N^c \circ i_N^s$ jest operatorem interpolacji Lagrange'a na dwuwymiarowej sieci węzłów $\Xi_N = \{(\zeta_i, \xi_j) : 0 \leq i, j \leq N\}$ z wartościami w $\mathbb{P}_N(\omega)$.

Przytaczamy za Bernardi i in. (1999) następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.3.¹ Dla dowolnych danych f i b ciągłych na $\bar{\omega}$ problem (17) ma jednoznaczne rozwiązanie w przestrzeni $\mathbb{P}_N(\omega)$.

Twierdzenie 3.4.² Załóżmy, że rozwiązanie u problemu (1) należy do $H_1^s(\omega)$, $s \geq \frac{5}{2}$ a $f \in H_1^\sigma$, $\sigma > \frac{3}{2}$, a ponadto $f \in H_1^s(\omega)$. Dla rozwiązania u_N problemu (17) zachodzi wtedy oszacowanie:

$$\|u - u_N\|_{H_1^1(\omega)} \leq c(N^{1-s} \|u\|_{H_1^s(\omega)} + N^{-\sigma} \|f\|_{H_1^\sigma(\omega)}).$$

Oszacowanie to zachodzi także dla $\frac{3}{2} < s \leq \frac{5}{2}$, $1 < \sigma \leq \frac{3}{2}$.

3.3. Układ równań algebraicznych i jego rozwiązanie

Niech ℓ_j ($j = 0, \dots, N$) będą wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a stopnia N takimi, że $\ell_i(\xi_j) = \delta_{i,j}$ czyli

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{x - \xi_i}{\xi_j - \xi_i}.$$

Analogicznie definiujemy wielomiany $\ell_j^{(2)}$ ($j = 0, \dots, N$) jako wielomiany interpolacyjne Lagrange'a stopnia N takie, że $\ell_i^{(2)}(r_j) = \delta_{i,j}$ czyli

$$\ell_j^{(2)}(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{x - r_i}{r_j - r_i}.$$

W myśl Twierdzenia 3.3 szukamy rozwiązania przybliżonego problemu (17) w postaci wielomianu u_N w $\mathbb{P}_N(\omega)$. Wielomian ten można przedstawić jako:

$$u_N(r, z) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u_{ij} \ell_i^{(m)}(r) \ell_j(z), \quad (19)$$

gdzie

$$u_{ij} = u(r_i, \zeta_j).$$

Pokażemy teraz sposób efektywnego wyliczenia wartości u_{ij} .

Oznaczmy dalej przez \mathcal{I} zbiór indeksów (i, j) węzłów $(r_i, \zeta_j) \in \omega$. Niech \mathcal{B} będzie zbiorem indeksów węzłów $(r_i, \zeta_j) \in \gamma$. Niech dalej

$$b_N(r, z) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N b_{ij} \ell_i^{(m)}(r) \ell_j(z),$$

$$b_{ij} = \begin{cases} b(r_i, \zeta_j) & (i, j) \in \mathcal{B}, \\ 0 & (i, j) \notin \mathcal{B}. \end{cases}$$

Stosując teraz (19) do zagadnienia (17), korzystając z (18), (16) i uwzględniając fakt, iż $\ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(\zeta)$, dla $(i', j') \in \mathcal{I}$ tworzą bazę $\mathbb{P}_N^\circ(\omega)$ otrzymujemy:

$$\forall (i', j') \in \mathcal{I},$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}} u_{ij} a_N \left(\ell_i^{(2)} \ell_j, \ell_{i'}^{(2)} \ell_{j'} \right) = \quad (20)$$

$$= \frac{1}{4} f_{i'j'} \sigma_{i'} \rho_{j'} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} b_{ij} a_N \left(\ell_i^{(2)} \ell_j, \ell_{i'}^{(2)} \ell_{j'} \right).$$

Powstaje więc układ równań:

$$AU = F. \quad (21)$$

Niewiadomymi tworzącymi wektor U są tu wartości $u_{i,j}$. Jest ich $N(N-1)$. Elementy macierzy A układu są równe

$$A_{(i,j),(i',j')} = a_N(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z), \ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z)),$$

gdzie $a_N(u_N, v_N)$ jest zdefiniowane wzorem (18), zatem

$$a_N(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z), \ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z)) =$$

$$= \left(\partial_r \left(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z) \right), \partial_r \left(\ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z) \right) \right)_{rN}$$

$$+ \left(\partial_z \left(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z) \right), \partial_z \left(\ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z) \right) \right)_{rN}.$$

Dalej korzystając ze wzoru (16) definiującego iloczyn $(u, v)_{rN}$ otrzymujemy

$$\left(\partial_r \left(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z) \right), \partial_r \left(\ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z) \right) \right)_{rN} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \ell_i^{(2)'}(r_k) \ell_j(\xi_l) \ell_{i'}^{(2)'}(r_k) \ell_{j'}(\xi_l) \sigma_k \rho_l.$$

Wiadomo również, że

$$\ell_j(\xi_l) \ell_{j'}(\xi_l) = \delta_{jl} \cdot \delta_{j'l} = \begin{cases} 1 & \text{gd } j = j' = l, \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

stąd

$$\left(\partial_r \left(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z) \right), \partial_r \left(\ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z) \right) \right)_{rN} =$$

$$= \delta_{jj'} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \ell_i^{(2)'}(r_k) \ell_{i'}^{(2)'}(r_k) \sigma_k \rho_j.$$

¹ Bernardi i in. (1999) str. 135 Thm. VII.1.4.

² Bernardi i in. (1999) str. 136 Thm. VII.1.6.

Analogicznie

$$\begin{aligned} & \left(\partial_z \left(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z) \right), \partial_z \left(\ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z) \right) \right)_{rN} = \\ & = \delta_{ii'} \frac{1}{4} \sum_{l=0}^N \ell_j'(\xi_l) \ell_{j'}'(\xi_l) \sigma_i \rho_l. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} & a(\ell_i^{(2)}(r) \ell_j(z), \ell_{i'}^{(2)}(r) \ell_{j'}(z)) = \\ & = \delta_{jj'} \rho_j \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \ell_i^{(2)'}(r_k) \ell_{i'}^{(2)'}(r_k) \sigma_k \\ & + \delta_{ii'} \sigma_i \frac{1}{4} \sum_{l=0}^N \ell_j'(\xi_l) \ell_{j'}'(\xi_l) \rho_l. \end{aligned}$$

Widzimy tym samym, że macierz A układu (o wymiarach $N(N-1) \times N(N-1)$) ma co najwyżej $2N(N-1)^2$ elementów niezerowych. Widać również, że można łatwo obliczać iloczyn AU mając dane:

$$\begin{aligned} \varphi_{ii'} &= \sum_{k=0}^N \ell_i^{(2)'}(r_k) \ell_{i'}^{(2)'}(r_k) \sigma_k, \\ \psi_{jj'} &= \sum_{l=0}^N \ell_j'(\xi_l) \ell_{j'}'(\xi_l) \rho_l, \\ A_{(i,j),(i',j')} &= \frac{1}{4} (\delta_{jj'} \rho_j \varphi_{ii'} + \delta_{ii'} \sigma_i \psi_{jj'}). \end{aligned}$$

Element wektora AU odpowiadający węzłowi (i', j') obliczamy więc następująco:

$$(AU)_{(i',j')} = \frac{1}{4} \left(\rho_{j'} \sum_{i \in \mathcal{I}} u_{(i,j')} \varphi_{ii'} + \sigma_{i'} \sum_{j \in \mathcal{I}} u_{(i',j)} \psi_{jj'} \right),$$

gdzie \mathcal{I} oznacza zbiór indeksów węzłów aproksymacji.

Ponieważ macierz układu (21) jest symetryczna i dodatnio określona, zatem można go łatwo rozwiązać metodą gradientów sprzężonych. Nie wymaga ona reprezentowania macierzy A w pamięci komputera w sposób jawny, bowiem do wyznaczenia $(\nu+1)$ -szej iteraty $U^{(\nu+1)}$ wystarcza wynik mnożenia $AU^{(\nu)}$ według wzoru podanego powyżej.

3.4. Obliczanie pochodnych wielomianów ℓ i $\ell^{(2)}$

Aby obliczyć wartości $\varphi_{ii'}$ i $\psi_{jj'}$ występujące w wzorach zaprezentowanych powyżej musimy wcześniej znać wartości pochodnych ℓ' i $\ell^{(2)'}$ w poszczególnych węzłach dyskretyzacji.

W tym celu skorzystamy z rozwinięcia wielomianów ℓ i $\ell^{(2)}$ w rozważanych bazach wielomianów ortogonalnych, aby następnie znaleźć ich pochodne cząstkowe.

Niech

$$\begin{aligned} \ell_j(z) &= \sum_{s=0}^N \alpha_{js} L_s(z), \\ \ell_i^{(2)}(r) &= \sum_{s=0}^N \bar{\alpha}_{is} M_s(2r-1), \\ \partial_z \ell_j(z) &= \sum_{s=0}^N \alpha_{js} L_s'(z), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\partial_r \ell_i^{(2)}(r) = \sum_{s=0}^N \bar{\alpha}_{is} M_s'(2r-1). \quad (23)$$

Wzory pozwalające obliczyć wartości $\bar{\alpha}_{is}$ i α_{js} dla $0 \leq s \leq N-1$ uzyskujemy korzystając ze wzorów (11) i (13) w sposób opisany w pracy Bożka (2002) otrzymując:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{js} &= \frac{1}{2} (s+1) \sigma_j M_s(r_j) \\ \alpha_{is} &= \left(s + \frac{1}{2} \right) \rho_i L_s(\xi_i). \end{aligned}$$

W przypadku $s = N$ nie możemy tak jak powyżej skorzystać ze wzorów (11) i (13) ponieważ wyrażenie podcałkowe staje się wtedy wielomianem stopnia $2N$. Można jednak zauważyć, iż dla dowolnego s zachodzi $M_s(\zeta_N) = 1$ i $L_s(\xi_N) = 1$, a zatem:

$$\ell_i^{(2)}(r_N) = \sum_{s=0}^N \bar{\alpha}_{is}, \quad \ell_j(z_N) = \sum_{s=0}^N \alpha_{js}.$$

Ostatecznie więc:

$$\bar{\alpha}_{js} = \begin{cases} \frac{1}{2} (s+1) \sigma_j M_s(r_j), & s < N, \\ - \sum_{t=0}^{N-1} \bar{\alpha}_{jt}, & s = N, j < N, \\ 1 - \sum_{t=0}^{N-1} \bar{\alpha}_{jt} = \frac{1}{N+1}, & s = j = N, \end{cases}$$

$$\alpha_{is} = \begin{cases} \left(s + \frac{1}{2} \right) \rho_i L_s(\xi_i), & s < N, \\ - \sum_{t=0}^{N-1} \alpha_{it}, & s = N, i < N, \\ 1 - \sum_{t=0}^{N-1} \alpha_{it} = \frac{1}{N+2}, & s = i = N. \end{cases}$$

Pochodne wielomianów Legendre'a L_n' oraz wielomianów M_n występujące we wzorach (22) i (23) można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$L_n'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} L_i(x), \quad M_n'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\beta}_{ni} M_i(x).$$

Współczynniki β_{ni} można otrzymać stosując wzór rekurencyjny (patrz (Bożek 2002)):

$$\beta_{nk} = \begin{cases} 2k+1 & \text{gdy } n+k \text{ nieparzyste,} \\ 0 & \text{gdy } n+k \text{ parzyste.} \end{cases}$$

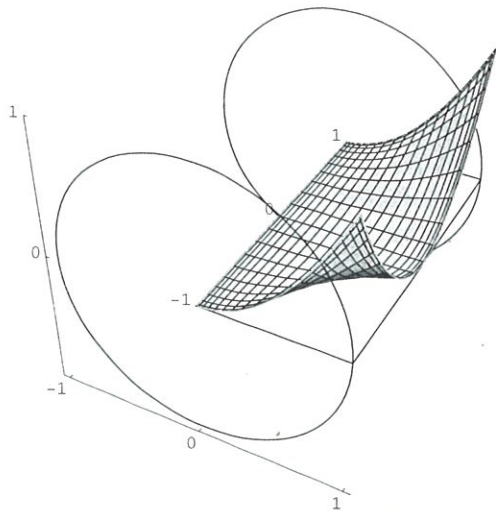
Analogiczny wzór dla $\bar{\beta}_{nk}$ ma postać

$$\bar{\beta}_{nk} = \begin{cases} \frac{2(k+1)(n+k+2)}{n+1} & \text{gdy } n+k \text{ nieparzyste,} \\ \frac{2(k+1)(n-k)}{n+1} & \text{gdy } n+k \text{ parzyste.} \end{cases}$$

4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

W oparciu o przedstawione wzory został napisany efektywny program w języku C i „symulator” w programie *MATHEMATICA*. Kody tych programów można pobrać z witryny <http://wms.mat.agh.edu.pl/~bozek>.

Przykład 4.1. Jeśli $f(r, z) = -2(r^2 + 2z^2)$, $b(1, z) = z^2$, $b(r, -1) = b(r, 1) = r^2$, to rozwiązaniem równania (1) jest funkcja $u(r, z) = r^2 z^2$. Z własności metody spektralnej wynika, że w sytuacji gdy rozwiązaniem równania (1) jest wielomian, to dla dostatecznie dużego N metoda spektralna daje rozwiązanie dokładne. Na rysunku poniżej przedstawiamy rozwiązanie otrzymane metodą spektralną z $N = 20$, które jak widać pokrywa się z rozwiązaniem dokładnym.



Rys. 1. Rozwiązanie numeryczne równania (1) dla przykładu 4.1. (Numerical solution of (1) for example 4.1.)

5. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy zostały wyprowadzone efektywne wzory obliczeniowe spektralnej metody Galerkinia rozwiązywania równania Poissona określonego w walcu umożliwiające implementację komputerową tej metody.

W spektralnej metodzie Galerkinia poszukuje się przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego w przestrzeni wielomianów. Wzory w tej metodzie są bardziej skomplikowane niż w metodzie elementu skończonego oraz macierze powstałych układów nie są tak rzadkie, jednak metoda ta już dla małej liczby węzłów daje bardzo dokładne rozwiązanie. Gdy rozwiązaniem równania (1) jest wielomian, to dla dostatecznie dużego N metoda spektralna daje po prostu rozwiązanie dokładne.

LITERATURA

- Abramowitz M., Stegun I.A. (edytorzy), 1972, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover.
- Bernardi C., Maday Y., Dauge M., 1999, *Spectral Methods for Azisymmetric Domains*, Gauthier-Villars & North-Holland.
- Bożek B., 2002, *Rozwiązywanie równania Poissona metodą spektralną*, Informatyka w Technologii Materiałów, 2, (2-3), 41 – 45.
- Gautschi W., 1999, *Orthogonal Polynomials and Quadrature*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 9, pp. 65 – 76, Kent State University.

Artykuł otrzymano 21 lipca 2004 r.