

INTERPOLACJA KROKOWA

BOGUSŁAW BOŻEK, PROKOP ŚRODA

STEP BY STEP INTERPOLATION

Abstract

In this paper step by step interpolation method is presented. Our method consists in that we take the shape of a curve (or a surface) and stretch it succesively (step by step) through given nodal points.

1. WPROWADZENIE

Problem modelowania krzywych i powierzchni występuje w wielu dziedzinach nauki i techniki (patrz Kiciak, 2000). Często wymaga się, aby krzywe i powierzchnie przechodziły przez z góry określone punkty, i wtedy mówimy o zagadnieniu interpolacji. W zależności od klasy funkcji użytych do tego celu, mówimy o interpolacji wielomianowej, trygonometrycznej, splinami itd. W niniejszej pracy przedstawiamy metodę interpolacji polegającą na:

- wstępnym przyjęciu krzywej lub powierzchni, niekoniecznie przechodzącej przez żądane punkty,
- takim jej przekształceniu (przy zastosowaniu bardzo prostych wzorów), aby przez wskazane punkty przechodziła.

Metodę nazwaliśmy interpolacją krokową, gdyż polega ona na stopniowym, krok po kroku, tworzeniu krzywych lub powierzchni między kolejnymi punktami. Pozwala również, tak utworzone krzywe, lub powierzchnie dalej przekształcać i dochodzić stopniowo do zamierzonego celu. Praca ta jest kontynuacją dwóch prac Bożka i Środy (2002).

2. INTERPOLACJA KROKOWA KRZYWYCH

Niech $m \in \{2, 3\}$ i niech

$$Q : \mathbb{R} \supset [0, 1] \ni t \rightarrow Q(t) \in \mathbb{R}^m$$

będzie zadaną gładką krzywą (płaską, albo przestrzenną). Przyjmijmy, że zadane są węzły $t_j \in [0, 1]$ ($j = 0, 1, \dots, n$), takie, że $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$ i wektory $v_j \in \mathbb{R}^m$. Z każdym węzłem t_j wiążemy funkcję φ_j , która jest afiniczna na każdym przedziale $[t_i, t_{i+1}]$ oraz $\varphi_j(t_i) = \delta_{ji}$, gdzie δ_{ji} oznacza deltę Kroneckera:

$$\varphi_j(t) := \begin{cases} \frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}} & \text{dla } t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j} & \text{dla } t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0 & \text{dla } t \notin [t_{j-1}, t_{j+1}], \end{cases}$$

przy czym t_{-1}, t_{n+1} są dodatkowymi węzłami wybranymi tak, że $t_{-1} < 0$ oraz $t_{n+1} > 1$. Przykładowo można przyjąć: $t_{-1} := -t_1$, a $t_{n+1} := 2t_n - t_{n-1}$. Funkcje φ_j nazywamy funkcjami daszkowymi, albo falakami Haara.

Krzywą interpolacyjną określamy zależnością

$$R_1(t) = Q(t) + \sum_{j=0}^n \varphi_j(t)v_j \quad (1)$$

Zamiast wektorów v_j można zadać punkty $P_j \in \mathbb{R}^m$, a wektory v_j zdefiniować jako $v_j = \overrightarrow{Q(t_j)P_j}$. Podobnie można zadać punkty Q_j leżące na krzywej Q , a węzły t_j dobrać tak, aby $Q_j = Q(t_j)$. Punkty Q_j można wybrać arbitralnie, albo przykładowo z warunku $\|Q_j P_j\| = \min_{t \in [0,1]} \|Q(t)P_j\|$, gdzie $\|\cdot\|$ jest ustaloną normą w przestrzeni \mathbb{R}^m .

W interpretacji geometrycznej, przekształcenie (1) przesuwa punkty $Q(t_j)$ do punktów P_j , a łuki rozpięte między punktami $Q(t_{j-1}), Q(t_j)$ transformuje na łuki rozpięte między punktami P_{j-1} i P_j ($j = 1, \dots, n$). Jeśli $Q_0 = P_0$ i $Q_n = P_n$, to końce krzywych $Q(t)$ i $R(t)$ pokrywają się. Otrzymana krzywa jest ciągła.

Funkcje daszkowe φ_j ($j = 0, 1, \dots, n$) możemy zastąpić dowolnym układem funkcji ψ_j takich, że

$$\psi_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad (2)$$

oraz

$$\forall_{t \in [0,1]} \sum_{j=0}^n \psi_j(t) = 1. \quad (3)$$

Dopuszczalnym wyborem są przykładowo funkcje

$$\psi_j(t) := \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}\right) & \text{dla } t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\right) & \text{dla } t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0 & \text{dla } t \notin [t_{j-1}, t_{j+1}], \end{cases}$$

lub spliny stopnia trzeciego

$$\theta_j(t) := \begin{cases} \frac{p_1(t)}{(t_j-t_{j-1})^3} & \text{dla } t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{p_2(t)}{(t_{j+1}-t_j)^3} & \text{dla } t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0 & \text{dla } t \notin [t_{j-1}, t_{j+1}], \end{cases}$$

gdzie

$$p_1(t) = -2t^3 + 3(t_{j-1} + t_j)t^2 - 6t_{j-1}t_j t + t_{j-1}^2(3t_j - t_{j-1}),$$

$$p_2(t) = 2t^3 - 3(t_j + t_{j+1})t^2 + 6t_j t_{j+1} t + t_{j+1}^2(t_{j+1} - 3t_j).$$

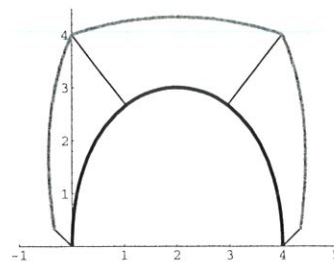
Definiujemy

$$R_2(t) = Q(t) + \sum_{j=0}^n \psi_j(t)v_j, \quad (4)$$

$$R_3(t) = Q(t) + \sum_{j=0}^n \theta_j(t)v_j. \quad (5)$$

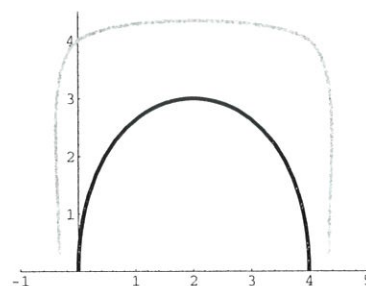
Jeśli krzywa $Q(t)$ jest klasy C^k , to krzywa R_2 jest także klasy C^k , natomiast krzywa R_3 jest klasy $C^{\min\{2,k\}}$.

Przykład 1 Krzywa Béziera rozpięta na punktach wiodących $P_0(0,0), P_1(0,4), P_2(4,4), P_3(4,0)$ ma postać $Q(t) = (4t^2(3-2t), 12t(1-t))$. Kładąc $n=3$, $t_0=0, t_1=\frac{1}{3}, t_2=\frac{2}{3}, t_3=1$, $v_0 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), v_1 = (-\frac{28}{27}, \frac{4}{3}), v_2 = (\frac{28}{27}, \frac{4}{3}), v_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Rysunek poniżej przedstawia krzywą Q i krzywą R_1 .



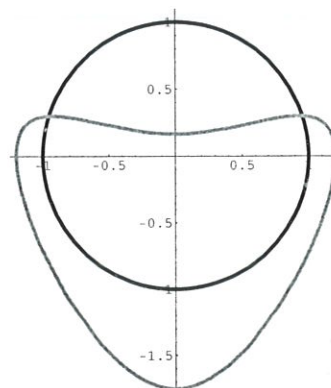
Rysunek 1: Krzywa Béziera $Q(t)$, wektory v_0, v_1, v_2, v_3 , oraz krzywa $R_1(t)$ z przykładu 1.

Kolejny rysunek przedstawia krzywą Q i krzywą R_3 .



Rysunek 2: Krzywa Béziera $Q(t)$ i krzywą $R_3(t)$ z przykładu 1.

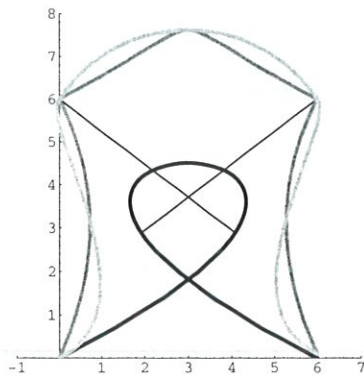
Przykład 2 Rozważmy okrąg jednostkowy $Q(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ $t \in [0,1]$. Niech $n=4$, $t_0=0, t_1=\frac{1}{4}, t_2=\frac{1}{2}, t_3=\frac{3}{4}, t_4=1$, $v_0 = (-\frac{1}{5}, 0), v_1 = (0, -\frac{5}{6}), v_2 = (\frac{1}{5}, 0), v_3 = (0, -\frac{3}{4}), v_4 = (-\frac{1}{5}, 0)$. Rysunek poniżej przedstawia okrąg Q i krzywą R_2 .



Rysunek 3: Okrąg Q i krzywą $R_2(t)$ z przykładu 2.

Przykład 3 Krzywa Béziera rozpięta na punktach wiodących $P_0(0,0), P_1(12,6), P_2(-6,6), P_3(6,0)$ ma

postać $Q(t) = (6t(6 - 15t + 10t^2), 18t(1 - t))$. Kładąc $n = 3$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{5}$, $t_2 = \frac{4}{5}$, $t_3 = 1$, $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (-\frac{102}{25}, \frac{78}{25})$, $v_2 = (\frac{102}{25}, \frac{78}{25})$, $v_3 = (0, 0)$. Rysunek poniżej przedstawia krzywą Q i krzywe R_1 i R_3 .

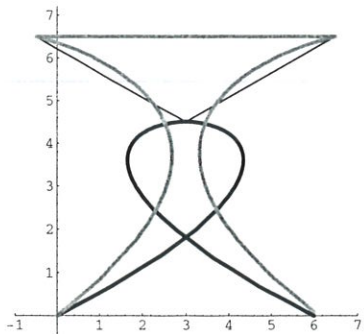


Rysunek 4: Krzywa Bézierną $Q(t)$, wektory v_1, v_2 oraz krzywe $R_1(t)$ i $R_3(t)$ z przykładu 3.

Dla zachowania przejrzystości rysunku została na nim pominięta krzywa R_2 , tylko nieznacznie różniąca się od krzywej R_3 .

Wcześniej przyjmowaliśmy, że węzły $t_j \in [0, 1]$ ($j = 0, 1, \dots, n$) spełniają warunki: $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. Żądanie, aby $t_j \leq t_{j+1}$ ($j = 0, \dots, n - 1$) można odrzucić, co pozwala osiągnąć ciekawe efekty graficzne. Jeśli dwa kolejne węzły się pokrywają, to odpowiadający im łuk redukuje się do odcinka.

Przykład 4 Bierzemy krzywą Bézierną z poprzedniego przykładu. Kładziemy $n = 3$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{2}{2}$, $t_3 = 1$, $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (-\frac{7}{2}, 2)$, $v_2 = (\frac{7}{2}, 2)$, $v_3 = (0, 0)$. Otrzymane teraz krzywe $R_1(t)$, $R_2(t)$ i $R_3(t)$ oczywiście diametralnie różnią się od wcześniejszych, ale też z uwagi na to, że $t_{21} = t_2$, jeden z łuków zredukował się do odcinka.



Rysunek 5: Krzywa Bézierną $Q(t)$, wektory v_1, v_2 oraz krzywe $R_1(t)$ i $R_3(t)$ z przykładu 4.

3. INTERPOLACJA KROKOWA PŁATÓW

Przedstawioną konstrukcję można łatwo uogólnić na płaty powierzchniowe prostokątne i trójkątne.

3.1. Płaty prostokątne

Niech

$$Q : \mathbb{R}^2 \supset [0, 1]^2 \ni (t, s) \rightarrow Q(t, s) \in \mathbb{R}^3.$$

Jeśli zadane są węzły $t_i \in [0, 1]$ i $s_j \in [0, 1]$ oraz wektory $v_{ij} \in \mathbb{R}^3$ ($i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, k$), to definiujemy

$$R_{11}(t, s) = Q(t, s) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k \varphi_i(t) \varphi_j(s) v_{ij}. \quad (6)$$

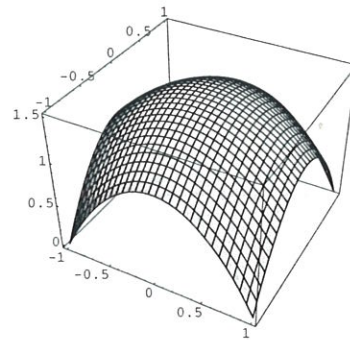
Podobnie jak poprzednio można funkcje φ_j zastąpić dowolnym układem funkcji spełniających warunki (2), (3), np. funkcjami ψ_j , czy θ_j (jeden z czynników, albo obydwa, tym samym typem funkcji, albo różnymi). Otrzymane płaty przez analogię oznaczymy symbolami R_{22} i R_{33} . W mocy pozostaje uwaga o regularności płatów.

Przykład 5 Punkty wodzące

$$\begin{aligned} P_{00}(-1, 1, 0), & \quad P_{01}(-1, 0, 2), & \quad P_{02}(-1, -1, 0) \\ P_{10}(0, 1, 2), & \quad P_{11}(0, 0, 2), & \quad P_{12}(0, -1, 2) \\ P_{20}(1, 1, 0), & \quad P_{21}(1, 0, 2), & \quad P_{22}(1, -1, 0). \end{aligned}$$

wyznaczają prostokątny płat Bézierną o równaniu

$$\begin{aligned} Q(t, s) = & \\ = & \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ 1 - 2s \\ 4((1-t)t + (1-s)s) - 8(1-t)t(1-s)s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

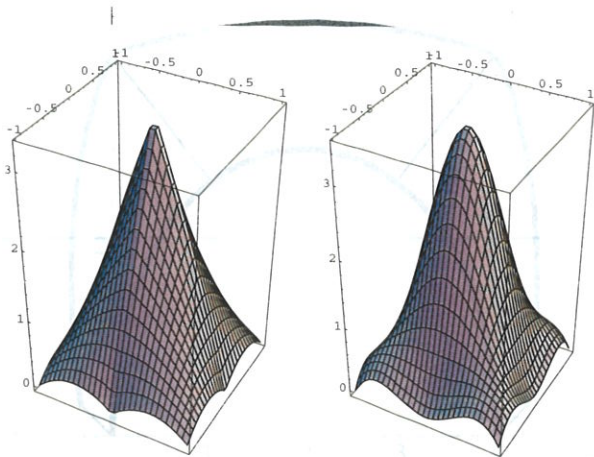


Rysunek 6: Płat powierzchni Bézierną $Q(t, s)$ z przykładu 5.

Gdy

$$\begin{aligned} n = k = 2, \\ v_{00} = v_{02} = v_{20} = v_{22} = (0, 0, 0)^T, \\ v_{10} = v_{12} = v_{01} = v_{21} = (0, 0, -1)^T, \\ v_{11} = (0, 0, 2)^T, \end{aligned}$$

wówczas płaty R_{11} , R_{33} przybierają efektowny kształt zaprezentowany na rysunku poniżej.



Rysunek 7: Płaty powierzchni $R_{11}(t, s)$ i $R_{33}(t, s)$ z przykładu 5.

3.2. Płaty trójkątne

Niech A_1, A_2, A_3 będą trzema niewspółliniowymi punktami leżącymi w płaszczyźnie Oxy . Niech

$$Q : \Delta_{A_1 A_2 A_3} \ni p \rightarrow Q(p) \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\Delta_{A_1 A_2 A_3}$ oznacza trójkąt o wierzchołkach A_1, A_2, A_3 . Każdy punkt $p \in \mathbb{R}^2$ należący do trójkąta $\Delta_{A_1 A_2 A_3}$ można jednoznacznie określić podając jego współrzędne barycentryczne $(q, r, t) \in [0, 1]^3, q+r+t=1$ względem jego wierzchołków tj. $p = p(q, r, t)$. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Na odcinku $[0, 1]$ definiujemy węzły $q_i = r_i = t_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Niech $v_{ijk} \in \mathbb{R}^3$ ($i + j + k = n$) będą zadanymi wektorami. Definiujemy

$$R_{111}(q, r, t) = Q(p(q, r, t)) + \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \varphi_i(q)\varphi_j(r)\varphi_k(t)v_{ijk},$$

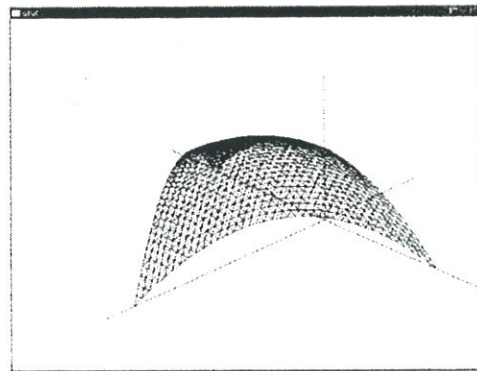
gdzie $(q, r, t) \in [0, 1]^3, q + r + t = 1$.

Jak łatwo policzyć, jest $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ liczb naturalnych i, j, k takich, że $i + j + k = n$. Tak jak poprzednio można funkcje φ_j zastąpić dowolnym układem funkcji spełniających warunki (2), (3), np. funkcjami ψ_j , czy θ_j otrzymując odpowiednio płaty R_{222} i R_{333} .

Przykład 6 Niech $n = 2$ oraz $A_1 = (-1, 0), A_2 = (1, 0), A_3 = (0, \sqrt{3})$. Łatwo sprawdzić, że $p(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}) = A_1, p(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{2}) = A_2, p(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{2}{2}) = A_3, p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}) = (0, 0), p(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), p(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Rozważamy płat trójkątny określony wzorem:

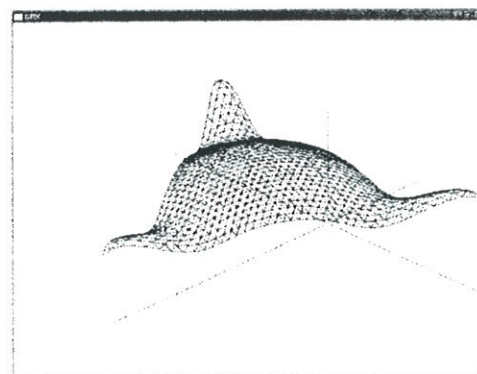
$$Q(q, r, t) = \begin{pmatrix} r - q \\ \sqrt{3}t \\ 4(qr + rt + qt) \end{pmatrix}$$

dla $q \geq 0, r \geq 0, t \geq 0, q + r + t = 1$. Płat ten jest przedstawiony na rysunku poniżej.



Rysunek 8: Trójkątny płat Q z przykładu 6.

Kładąc $v_{300} = (-2, -\frac{1}{5}, 1)^T, v_{030} = (2, -\frac{1}{5}, 1)^T, v_{003} = (0, \frac{3}{10}, 1)^T$ oraz $v_{012} = v_{120} = v_{102} = v_{210} = v_{021} = v_{201} = v_{111} = (0, 0, 0)^T$, płat R_{222} przybiera kształt zaprezentowany na rysunku poniżej.



Rysunek 9: Płat R_{222} z przykładu 6.

4. PODSUMOWANIE

Zaproponowana w pracy metoda interpolacyjna polegająca na wstępnym zadaniu krzywej bądź powierzchni i takim jej przekształceniu (przy zastosowaniu prostych wzorów), aby przechodziła przez zadane punkty, umożliwia przewidzenie skutków tych przekształceń, co pozwala na jej intuicyjne stosowanie.

LITERATURA

- Bożek B., Środa P., 2002, Modyfikacja wielomianowych krzywych Béziera, *Informatyka w Technologii Materiałów*, 2 (1), 34-37.
- Bożek B., Środa P., 2002, Modyfikacja wielomianowych powierzchni Béziera, *Informatyka w Technologii Materiałów*, 2 (4), 101-105.
- Kiciak P., 2000, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni - zastosowania w grafice komputerowej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Artykuł otrzymano 1 kwietnia 2004 r.