

## WIELOETAPOWA OPTYMALIZACJA TOPOLOGICZNA I PARAMETRYCZNA UKŁADÓW USZTYWNIONYCH

I. MARCZEWSKA, W. SOSNOWSKI, A. MARCZEWSKI, T. BEDNAREK

### MULTI-STEP TOPOLOGY AND SIZING OPTIMIZATION OF STIFFENED STRUCTURES

#### Abstract

*The work deals with multi-step topology and sizing optimisation of stiffened elastic plates and shells. Topology optimisation provides the optimal plate and shell topology giving proper localization of stiffening zones. The problem of optimal choice of the number of stiffeners and its rigidity depends on specific design. The second stage gives directions of stiffeners. Mean moments are used to determine the optimal orientation of the stiffeners. The third step based on strict sensitivity analysis and/or topology optimisation is included into the multi-step design procedure. At this point more detailed sizing of stiffeners cross-section is considered. The three-layer Kirchhoff-Love plate model is used with topology optimisation procedure to determine optimal stiffening zones.*

**Keywords:** topology, size optimisation, stiffened plates and shells

### 1. WSTĘP

Oparta na ścisłych metodach analizy wrażliwości, wielokryterialna optymalizacja parametryczna i topologiczna jest nowoczesną, interdyscyplinarną dziedziną badań naukowych służącą bezpośrednio zastosowaniom praktycznym. Analiza wrażliwości rozwijana jest od około 25 lat, historię rozwoju tej grupy metod numerycznych zawiera podręcznik (Kleiber i in., 1997). Optymalizacja topologiczna liczy sobie zaledwie kilkanaście lat, pierwsze prace ukazały się w latach osiemdziesiątych, przegląd literatury można znaleźć w monografii (Bendsoe, 1995). Bardzo dużo prac prezentowanych na światowym kongresie poświęco-

nym optymalizacji (5-th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Lido di Jesolo, Wenecja, 2003) dotyczyła tej właśnie tematyki (Marczewska i in., 2003), (Sigmund i Jensen, 2003). Efektywność omawianych metod numerycznych wynika z bardzo uniwersalnego charakteru metody elementów skończonych stanowiącej podstawę omawianych algorytmów (Zienkiewicz i Taylor, 2000).

Płyty i powłoki usztywnione są często stosowane jako samodzielne układy lub elementy składowe wielu nowoczesnych konstrukcji. Wykorzystuje się je w budownictwie lądowym i wodnym. Są stosowane w przemyśle samochodowym, przede wszystkim jako elementy składowe podłóg i nadwozia. W przemyśle

I. Marzewska<sup>1</sup>, W. Sosnowski<sup>1,2</sup>, A. Marzewski<sup>1</sup>, T. Bednarek<sup>1,2</sup>, <sup>1</sup>Institut Podstawowych Problemów Techniki - PAN, Pracownia Metod Obliczeniowych Mechaniki Nieliniowej, 00-049 Warszawa ul. Świętokrzyska 21, e-mail: imar@ippt.gov.pl; <sup>2</sup> Akademia Bydgoska im. Kazimierza Wielkiego

okrętowym stanowią podstawowe części składowe kadłubów statków. W przemyśle lotniczym są wykorzystywane jako elementy skrzydeł i kadłubów. We wszystkich wyżej wymienionych gałęziach przemysłu koszty wytworzenia prototypów oraz produktu końcowego są bardzo wysokie. W związku z tym požądane są wszelkie oszczędności w projektowaniu i wykonaniu produktu finalnego.

Najczęściej, w projektowaniu optymalnych konstrukcji zginanych, poszukiwane są takie wymiary układu, przy których energia odkształcenia, globalna podatność czy maksymalne ugięcie są najmniejsze, zaś globalna sztywność największa. Mając dowolną płytę czy powłokę trudno jest od razu określić, jaki powinien być rozkład grubości zapewniający jej maksymalną sztywność. W takim przypadku można wykorzystać optymalizację topologiczną, która pozwoli określić optymalne rozmieszczenie materiału w zadanym obszarze projektowym czyli określić strefy wymagające wzmocnienia.

W strefach tych można wprowadzić usztywnienia. Zastosowanie usztywnień zwiększa dodatkowo sztywność płyty. W projektowaniu żeber wyróżnia się dwa podstawowe schematy. Można stosować małą ilość „mocnych” lub dużą ilość „słabych” usztywnień. Dobierając usztywnienia projektant kieruje się głównie normami dotyczącymi nośności i wyoboczenia oraz względami ekonomicznymi i użytkowymi.

Mając dobraną ilość i rozmieszczenie usztywnień można przystąpić do ostatniej fazy projektowania, która polega na określeniu optymalnej geometrii żeber. Znając ogólny kształt i rozmieszczenie wzmocnień można określić takie parametry projektowe, których nawet niewielkie zaburzenia znacząco wpływają na odpowiedź układu. Mogą to być wybrane parametry przekrojów, na przykład wysokość usztywnień. Parametry te są w dalszym procesie projektowania zmiennymi decyzyjnymi zadania optymalizacji parametrycznej.

## 2. PROSTY IZOTROPOWY MATERIAŁ Z PRAWEM POTĘGOWYM

Użyty w pracy Prosty Izotropowy Materiał z Prawem Potęgowym (ang. Simple Isotropic Material with Penalization SIMP (Bendsoe, 1995)) jest materiałem sztucznym o zmiennej gęstości  $\rho$ . W dalszych rozważaniach nazywany będzie także materiałem zastępczym lub materiałem rozrzedzonym. Zmienna gęstość sztucznego materiału w obszarze projektowym – może przyjmować wartości z przedziału  $0 \leq \rho \leq \rho_0$ , gdzie  $\rho_0$  jest gęstością rzeczywistego materiału litego.

Obszar projektowy  $\Omega$  jest podzielony na elementy skończone. Gęstość materiału zastępczego, w elemencie obszaru projektowego  $\Omega$  jest zapisana wzorem

$$\rho_e = \zeta_e \cdot \rho_0 \quad (1)$$

$\rho_e$  jest zmienną decyzyjną i opisuje miarę gęstości materiału sztucznego. Zmienna miara gęstości może przyjmować wartości z przedziału

$$0 \leq \zeta_e \leq 1,0 \quad (2)$$

Gdy  $\zeta_e$  przyjmuje wartość 1,0 wówczas gęstość materiału zastępczego jest równa gęstości materiału litego  $\rho_e = \rho_0$ . Obszary, w których  $\zeta_e = 0$  uważane są za puste.

W procesie optymalizacji topologicznej poszukiwana jest taka gęstość sztucznego materiału, która zapewni układowi minimalną podatność a co za tym idzie maksymalną sztywność. Zmienna, sztuczna gęstość będzie wzrastać w obszarach bardziej wyteżonych ( $\rho \rightarrow \rho_0$ ). W obszarach mniej wyteżonych wartości sztucznej gęstości będą dążyć do zera ( $\rho \rightarrow 0$ ).

## 3. WARSTWOWY MODEL PŁYT I POWŁOK

W zadaniu optymalizacji topologicznej płyt i powłok wielowarstwowych zastępczy model płyty (Afonso i in., 2000), (Marczewska i Sosnowski, 2001), (Marczewska, 2003) (patrz rysunek 1) może być zbudowany z naprzemiennie ułożonych warstw wypełnionych materiałem litym i warstw wypełnionych materiałem zastępczym. Optymalizacja topologiczna polega na odpowiednim rozmieszczeniu materiału w warstwach wypełnionych materiałem zastępczym. Warstwy te stanowią obszar projektowy  $\Omega$  zadania optymalizacji topologicznej.

Zależność pomiędzy sztywnością materiału zastępczego i miarą gęstości materiału dla płyty jednowarstwowej przyjmuje postać

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \zeta_e^p (z_3 - z_2) & 0 \\ 0 & \zeta_e^p \frac{(z_3^3 - z_2^3)}{3} \end{bmatrix} \mathbf{D}^o \quad (3)$$

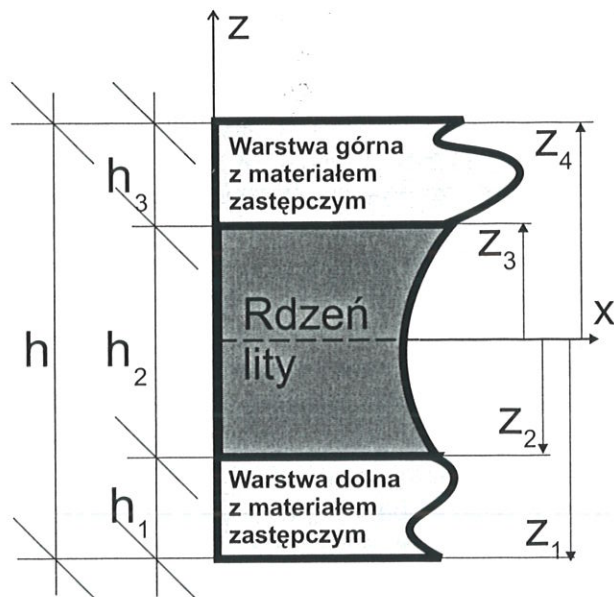
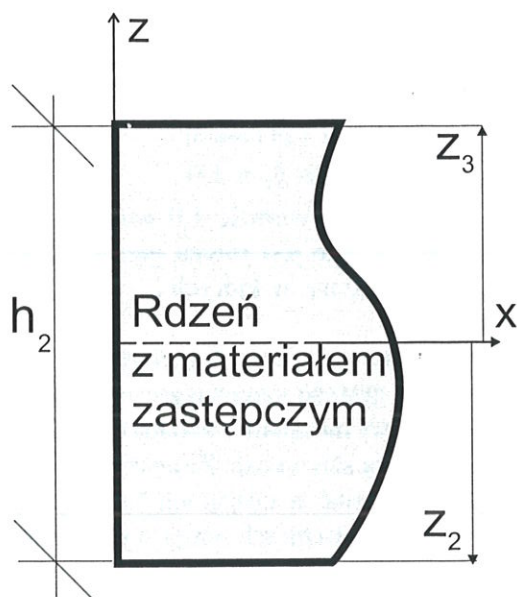
zaś dla płyt trójwarstwowych z litym rdzeniem i zewnętrznymi warstwami wypełnionymi materiałem rozrzedzonym macierz sztywności materiałowych jest dana wzorem

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \zeta_e^p [(z_2 - z_1) + (z_4 - z_3)] + (z_3 - z_2) & 0 \\ 0 & \zeta_e^p \left[ \frac{(z_2^3 - z_1^3)}{3} + \frac{(z_4^3 - z_3^3)}{3} \right] + \frac{(z_3^3 - z_2^3)}{3} \end{bmatrix} \mathbf{D}^o \quad (4)$$

$\mathbf{D}^o$  opisuje własności materiałowe dla materiału litego i dla przypadku płaskiego stanu naprężenia przyjmuje postać

$$\mathbf{D}^o = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$





Rysunek 1. Jednowarstwowy i trójwarstwowy model płyty.  
Figure 1. One and three layers model of the plate.

$E$  i  $\nu$  jest odpowiednio modułem Younga i współczynnikiem Poissona. Wartość wykładnika  $p$ , we wzorach (3) i (4), jest przyjmowana z przedziału  $1 < p < 9$ . Aby określić optymalną wielkość wykładnika przeprowadza się dodatkowe analizy (Hassani i Hinton, 1999). Im wyższe wartości  $p$  tym rozwiązania zawierają mniej regionów z materiałem sztucznym o zmiennej gęstości ( $\rho \neq \rho_0$ ).

#### 4. SFORMUŁOWANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI TOPOLOGICZNEJ

Zadanie optymalizacji topologicznej polegające na zaprojektowaniu miary gęstości materiału  $\zeta_e$ , zapewniającej układowi minimalną podatność  $c$  (maksymalna sztywność) jest formułowane w następujący sposób: znajdź

$$\min_{\zeta_e} c = \sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \left[ \int_{A_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dA \right] \mathbf{q}_e \quad (6)$$

przy ograniczeniach

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (7)$$

$$\sum_{e=1}^N \zeta_e v_e - f \sum_{e=1}^N v_e = 0 \quad (8)$$

$$\zeta_e^{\min} \leq \zeta_e \leq 1,0 \quad (9)$$

$\mathbf{q}_e$  jest wektorem przemieszczeń węzłowych  $e$ -tego elementu,  $A_e$  jest polem podstawy elementu płyty,  $\mathbf{B}_e$  jest macierzą pochodnych funkcji kształtu. Równanie (7) jest równaniem równowagi układu.  $\mathbf{q}$  jest global-

nym wektorem przemieszczeń węzłów konstrukcji,  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{F}$  są odpowiednio globalną macierzą sztywności i wektorem sił zewnętrznych.  $v_e$  jest objętością elementu dyskretyzacji. Wyrażenie (8) jest równaniem stałej ilości materiału w elementach obszaru  $\Omega$ . Pierwszy człon w/w wyrażenia oznacza objętość materiału zastępczego, zaś drugi jest objętością obszaru projektowego pomnożoną przez stałą  $f$ . Stała ta określa stopień początkowego rozrzedzenia materiału litego w obszarze projektowym  $\Omega$ . Jeśli objętość materiału litego jest o połowę mniejsza od objętości obszaru projektowego to wówczas  $f = 0,5$ . Wyrażenie (9) określa zakres zmienności miary gęstości materiału zastępczego. Gdy  $\zeta_e$  przyjmuje wartość 1,0 wówczas element jest całkowicie wypełniony materiałem litym. Obszary, w których  $\zeta_e = \zeta_e^{\min}$  uważane są za puste.

#### 5. KRYTERIA OPTIMALNOŚCI

Rozwiązanie zadania minimalizacji globalnej podatności przy ograniczeniach danych wzorami (7)–(9) może być uzyskane drogą wyznaczania punktu stacjonarnego funkcji Lagrange'a określanego z warunków optymalności Kuhna-Tuckera. Funkcja Lagrange'a dla zadania (6)–(9) przyjmuje postać

$$L = \sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}_e + \Gamma^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}) + \lambda \left( \sum_{e=1}^N \zeta_e v_e - f \sum_{e=1}^N v_e \right) +$$

$$\sum_{e=1}^N \zeta_e^d (\zeta_e^{\min} - \zeta_e) + \sum_{e=1}^N \zeta_e^g (\zeta_e - 1,0) \quad (10)$$

$\mathbf{k}_e = \int_{A_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dA$  jest macierzą sztywności elemen-

tu wypełnionego sztucznym materiałem rozrzedzonym,  $\Gamma$  i  $\lambda$  są mnożnikami Lagrange'a stojącymi przy ograniczeniach typu równościowego, zaś  $\xi_e^d$  i  $\xi_e^g$  są mnożnikami Lagrange'a stojącymi przy ograniczeniach typu nierównościowego. Warunki optymalności Kuhna-Tuckera wyrażają zależności

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \zeta_e} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_e^d} \leq 0, \quad \xi_e^d \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_e^d} \xi_e^d = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_e^g} \leq 0, \quad \xi_e^g \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_e^g} \xi_e^g = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

W prezentowanej pracy problem optymalizacji topologicznej był rozwiązywany przy użyciu metod kryteriów optymalności. W metodach tych na każdym kroku iteracyjnym określany jest zbiór ograniczeń aktywnych. Jeśli znamy strefy gdzie ograniczenia nierównościowe są nieaktywne to możemy w nich posługiwać się równościowymi warunkami stacjonarności funkcji Lagrange'a. Dla stref gdzie ograniczenia są aktywne trzeba wykorzystać nierównościowe warunki Kuhna-Tuckera.

Dla pośrednich wartości zmiennych decyzyjnych,  $\zeta_e^{\min} < \zeta_e < 1,0$ , ograniczenia nierównościowe (9) stają się nieaktywne. Uwzględniając zależności (11) kryterium optymalności dla pośrednich wartości miar gęstości materiału można zapisać w postaci

$$-\frac{\partial(\mathbf{q}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}_e)}{\partial \zeta_e} = 1,0 \quad (12)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$Q_e = \frac{\partial(\mathbf{q}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}_e)}{\partial \zeta_e} \quad (13)$$

wyrażenie (12) możemy zapisać zależnością  $Q_e = 1,0$ . Interpretacja fizyczna wyrażenia (12) jest następująca: gęstość pochodnej podatności z miarą  $1/\lambda$  jest równa jeden w każdym elemencie obszaru dla pośrednich miar gęstości materiału  $\zeta_e$ .

Gdy spełniony jest warunek (12) dla pośrednich miar gęstości  $\zeta_e^{\min} < \zeta_e < 1,0$  rozwiązanie uważane jest za optymalne.

Gdy dolne ograniczenie staje się aktywne,  $\zeta_e^{\min} - \zeta_e = 0$  i  $\xi_e^d \geq 0$ , kryterium optymalności przyjmuje postać

$$Q_e = 1 - \frac{\xi_e^d}{\lambda \nu_e} \leq 1 \quad (14)$$

Dla górnego ograniczenia aktywnego,  $\zeta_e - 1 = 0$ ,  $\xi_e^g \geq 0$ , kryterium optymalności przyjmuje postać

$$Q_e = 1 + \frac{\xi_e^g}{\lambda \nu_e} \geq 1 \quad (15)$$

Wykorzystując powyższe związki Bendsoe (Bendsoe, 1995) proponuje następujący schemat uaktualniania zmiennych decyzyjnych zadania optymalizacji topologicznej

$$\zeta_e^{k+1} = \begin{cases} \max(\zeta_e^{\min}, (\zeta_e - m)) & \text{gdy} \quad \zeta_e^k Q_e^k \leq \max(\zeta_e^{\min}, (\zeta_e - m)) \\ \zeta_e^k Q_e^k & \text{gdy} \quad \min(1, (\zeta_e + m)) < \zeta_e^k Q_e^k < \max(\zeta_e^{\min}, (\zeta_e - m)) \\ \min(1, (\zeta_e + m)) & \text{gdy} \quad \min(1, (\zeta_e + m)) \leq \zeta_e^k Q_e^k \end{cases} \quad (16)$$

$\eta$  jest parametrem tłumienia,  $m$  długością kroku. Mnożniki Lagrange'a  $\Gamma$  i  $\lambda$  są wyznaczane z warunków

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

## 6. DOBÓR KIERUNKÓW USZTYWNIENÍ

W pracy wprowadzane jest założenie, że kierunki usztywnień pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych. Kierunki naprężeń głównych określane są dla układów o zmiennej grubości, których ogólny kształt określa się na drodze optymalizacji topologicznej. Kierunki główne w danym przekroju układu zależą od składowych naprężeń danych w układzie kartezjańskim i są wyrażone poprzez zależności

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\sigma_{xy})^2} \quad (17)$$

$\sigma_x, \sigma_y$  są naprężeniami w kierunku osi  $x$  i  $y$ , zaś  $\sigma_{xy}$  jest naprężeniem ścinającym. W układzie kierunków głównych panują tylko naprężenia normalne. Kąt nachylenia kierunków głównych dany jest wzorem

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{-2\sigma_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right] \quad (18)$$

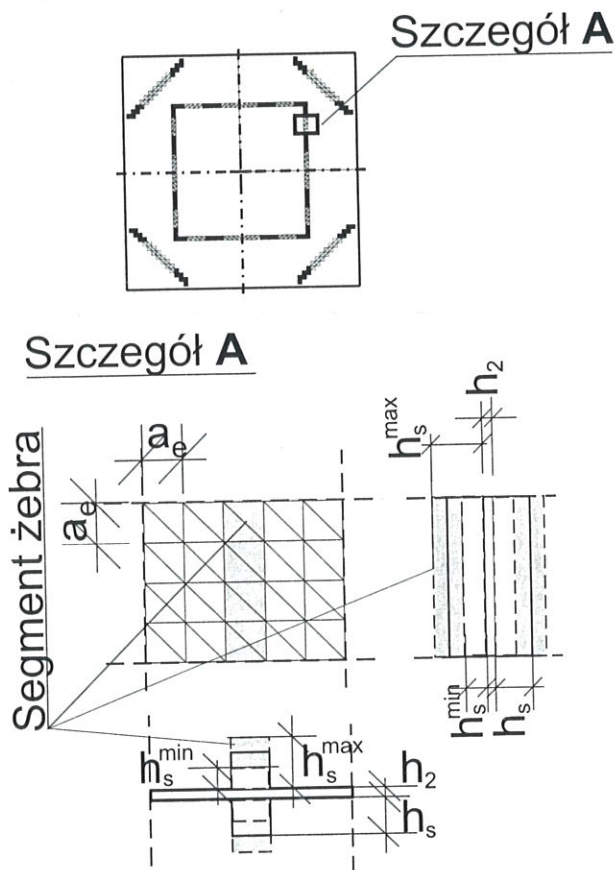
W projektowaniu żeber wyróżnia się dwa podstawowe schematy usztywnień. Można stosować małą ilość wysokich lub dużą ilość niskich usztywnień. Dobierając usztywnienia projektant kieruje się głównie normami dotyczącymi nośności i wybożenia.



## 7. OPTIMALIZACJA WYSOKOŚCI USZTYWNIENÍ

Znając rozmieszczenie stref wymagających wzmocnienia określonych na drodze optymalizacji topologicznej, oraz przyjmując schemat usztywnień w tych strefach na podstawie kierunków naprężeń głównych możemy przystąpić do optymalizacji parametrycznej wysokości usztywnień.

Optymalizacja parametryczna wysokości usztywnień polega na określeniu wysokości segmentów żeber wzmacniających płytę, tak aby zaprojektowany układ charakteryzował się największą sztywnością, a zatem minimalną wartością globalnej podatności  $c$ . Żebra zostaną podzielone na segmenty. Zmiennymi decyzyjnymi zadania będą wysokości w/w segmentów żeber. Geometrię przykładowego segmentu żeber wzmacniających płytę swobodnie podpartą przedstawiono na rysunku 2. Zadanie parametrycznej optymalizacji wysokości żeber będzie rozwiązywane przy użyciu metod programowania nieliniowego z ograniczeniami, bazujących na analizie wrażliwości przeprowadzanej metodami bezpośredniego różniczkowania. Zadanie optymalizacji parametrycznej wysokości żeber poprzez minimalizację globalnej podatności układu, przy spełnieniu warunku stałej ilości materiału



Rysunek 2. Geometria segmentu żebra.  
Figure 2. Geometry of the stiffeners segment.

żeber, można zapisać następująco: znajdź

$$\min_{h_s} \sum_{s=1}^m \sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}_e \quad (19)$$

przy ograniczeniach

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (20)$$

$$\sum_{s=1}^m \sum_{e=1}^N \left( b_e^s \frac{1}{2} a_e^2 h_s \right) - \sum_{s=1}^m \sum_{e=1}^N \left( b_e^s \frac{1}{2} a_e^2 h_s^b \right) = 0 \quad (21)$$

$$h_s^{\min} \leq h_s \leq h_s^{\max} \quad (22)$$

$h_s^{\min}$  i  $h_s^{\max}$  są dolnym i górnym ograniczeniem wysokości segmentu usztywnienia.  $b_e^s$  jest macierzą identyfikacji elementów segmentu żebra.  $\frac{1}{2} a_e^2 h_s^k$  oznacza objętość elementu.  $h_s^b$  jest początkową wysokością segmentu.

Macierz sztywności pogrubionego elementu płyty, stanowiącego element usztywnienia przyjmuje postać

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e d\Omega = \int_A \mathbf{B}_e^T \begin{bmatrix} h_2 + 2b_e^s h_s & 0 \\ 0 & \frac{(h_2 + 2b_e^s h_s)^3}{12} \end{bmatrix} \mathbf{D}^o \mathbf{B}_e dA \quad (23)$$

Po podstawieniu wyrażenia (23) do wzoru (19) pochodna podatności względem wysokości usztywnienia przyjmuje postać

$$\frac{\partial c}{\partial h_s} = \frac{\partial \sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \int_A \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dA \mathbf{q}_e}{\partial h_s} =$$

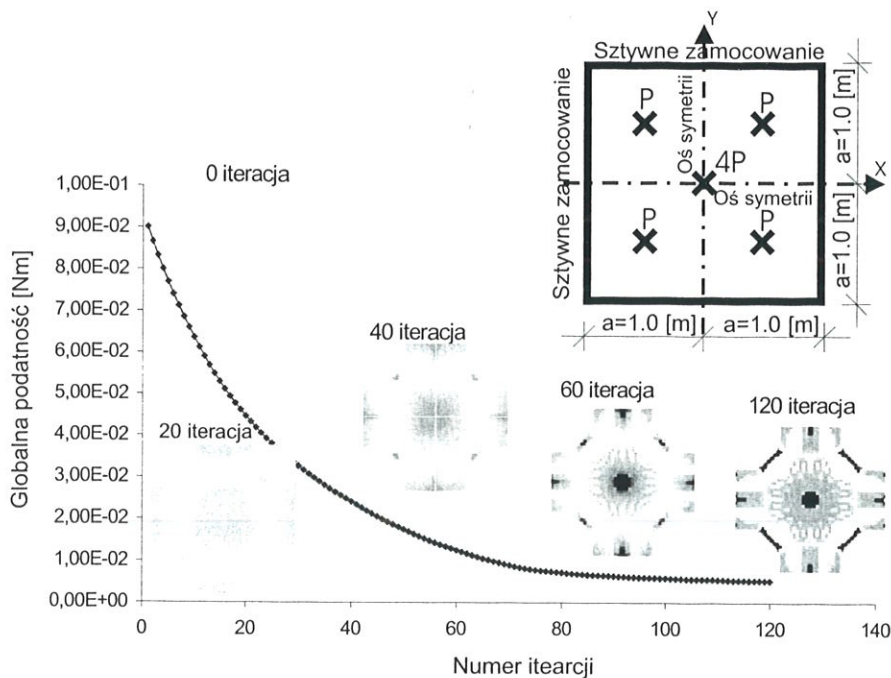
$$\sum_{e=1}^N \mathbf{q}_e^T \int_A \mathbf{B}_e^T \begin{bmatrix} 2b_e^s & 0 \\ 0 & \frac{(h_2 + 2b_e^s h_s)^2}{2} \end{bmatrix} \mathbf{D}^o \mathbf{B}_e dA \mathbf{q}_e \quad (24)$$

Określona wrażliwość podatności na zmianę wysokości usztywnienia jest zaimplementowana w algorytmie używanym do rozwiązywania zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami opisanego w pracach (Schittkowski, 1986) i (Sosnowski i in., 2002).

## 8. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

### 8.1. Optymalizacja topologiczna płyty jednowarstwowej obciążonej pięcioma siłami

Rozważana jest sztywno zamocowana płyta jednowarstwowa obciążona pięcioma siłami tak jak na



Rysunek 3. Optymalizacja topologiczna płyty sztywno zamocowanej i obciążonej pięcioma siłami.

Figure 3. Topology optimization of the clamped plate loaded by five point forces.

$m = 0,02, f = 0,25, \xi_e^{min} = 0,0001$ .

Optymalny kształt konstrukcji oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawia rysunek 3. Rozwiązanie optymalne uzyskano w 120-stej iteracji. Podatność konstrukcji optymalnej spadła o około 90% w stosunku do wartości podatności dla projektu początkowego.

Materiał gromadzi się w okolicach przyłożenia sił i zamocowania płyty. Ze względów technicznych elementy, gdzie miara gęstości materiału przyjmuje stosunkowo małe wartości, nie mogą być brane pod uwagę jako elementy nośne. Z praktycznego punktu widzenia spójność płyty nie została zachowana.

Uzyskano zupełnie nowe jakościowo rozwiązanie. Otrzymany układ przenosi zadane obciążenie i jest maksymalnie sztywny, przy założonej ilości materiału.

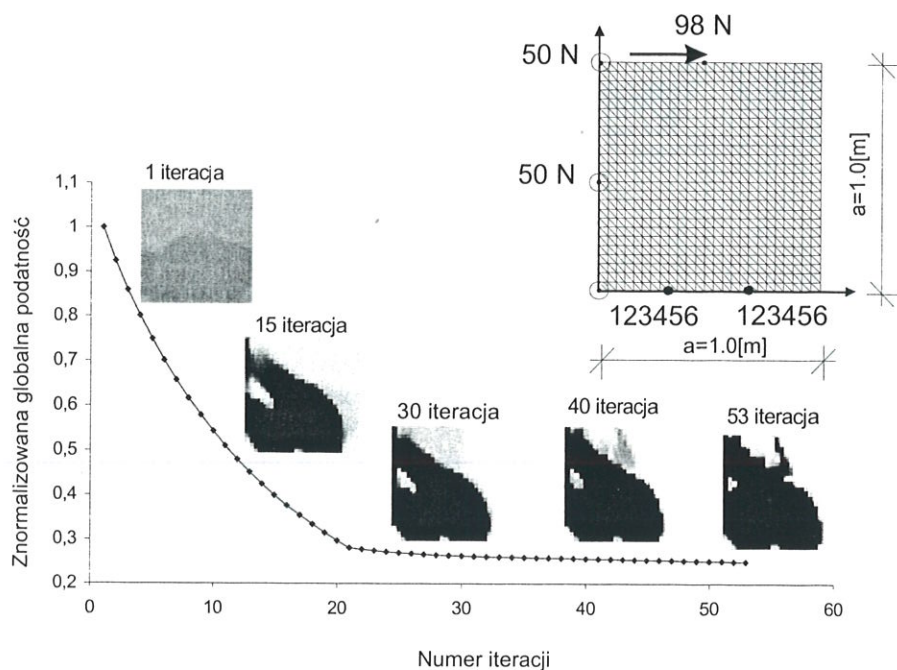
## 8.2. Optymalizacja topologiczna płyty jednowarstwowej zginanej i ścinanej

Rozważana jest sztywno zamocowana płyta jednowarstwowa obciążona dwiema siłami zginającymi i jedną siłą ścinającą tak jak na rysunku 4. Przyjęto płytę kwadratową o grubości 0,005 [m],  $E = 210$  [MPa],  $\nu = 0,3$ . W zadaniu optymalizacji topologicznej przyjęto:  $p = 3, \eta = 0,8, m = 0,02, f = 0,6, \xi_e^{min} = 1,0 \cdot 10^{-8}$ .

Optymalny kształt konstrukcji oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawia rysunek 4.

Rozwiązanie optymalne uzyskano w 53-ciej iteracji. Podatność konstrukcji optymalnej spadła o około 70% w stosunku do wartości podatności dla projektu początkowego.

W wyniku optymalizacji topologicznej uzyskaliśmy nowy kształt płyty z otworami w środku. Materiał gromadzi się w okolicach przyłożenia sił i zamocowania płyty.



Rysunek 4. Optymalizacja topologiczna płyty zginanej i ścinanej.

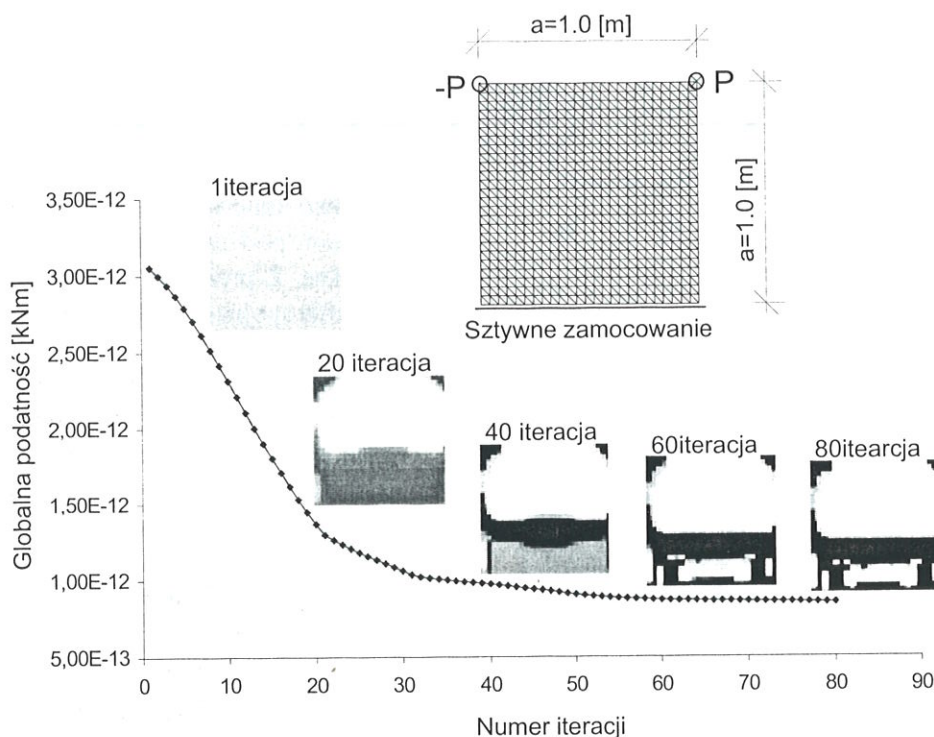
Figure 4. Topology optimization of the clamped plate loaded by bending and shear.

rysunku 3. Ze względu na symetrię rozważano 1/4 część układu zamodelowaną 1250-cioma trójkątnymi elementami Kirchhoffa. Tej samej dyskretyzacji użyto dla wszystkich płyt i powłok prezentowanych w pracy. Do rozwiązania zadania statyki przyjęto następujące dane: wartość siły  $P = 40,0$  [kN], grubość płyty  $h = 0,02$  [m],  $E = 210$  [MPa];  $\nu = 0,3$ . W zadaniu optymalizacji topologicznej przyjęto:  $p = 3, \eta = 0,5$ ,

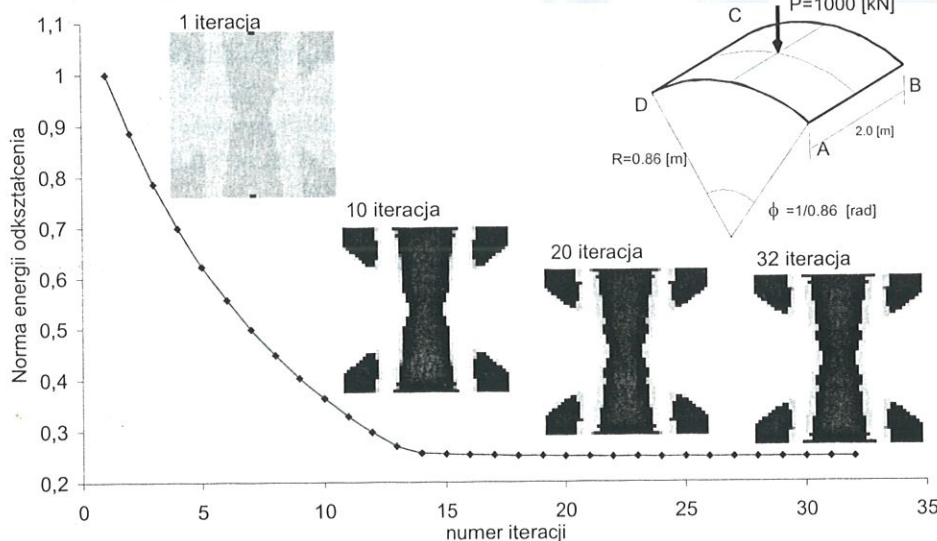


### 8.3. Optymalizacja topologiczna zginanej płyty trójwarstwowej

Rozważana jest zginana płyta trójwarstwowa obciążona dwiema siłami  $P = 8 \cdot 10^{-10}$  [kN] według rysunku 5. Grubość rdzenia  $h_2 = 0,002$  [m], grubości skrajnych warstw  $h_1 = 0,0015$  [m].  $E = 0,8$  [kN/m<sup>2</sup>],  $\nu = 0,3$ . W zadaniu optymalizacji topologicznej przyjęto:  $p = 3, \eta = 0,5, m = 0,02, f = 0,4, \xi_e^{min} = 1,0 \cdot 10^{-8}$ .



Rysunek 5. Optymalizacja topologiczna zginanej płyty wspornikowej.  
Figure 5. Topology optimization of the plate loaded by bending.



Rysunek 6. Optymalne rozmieszczenie materiału w powłoce trójwarstwowej.  
Figure 6. Optimal material distribution in three layers shell.

Optymalny kształt konstrukcji oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawia rysunek 5. Rozwiązanie optymalne uzyskano w 80-tej iteracji. Podatność konstrukcji optymalnej spadła o około 70% w stosunku do wartości podatności dla projektu początkowego.

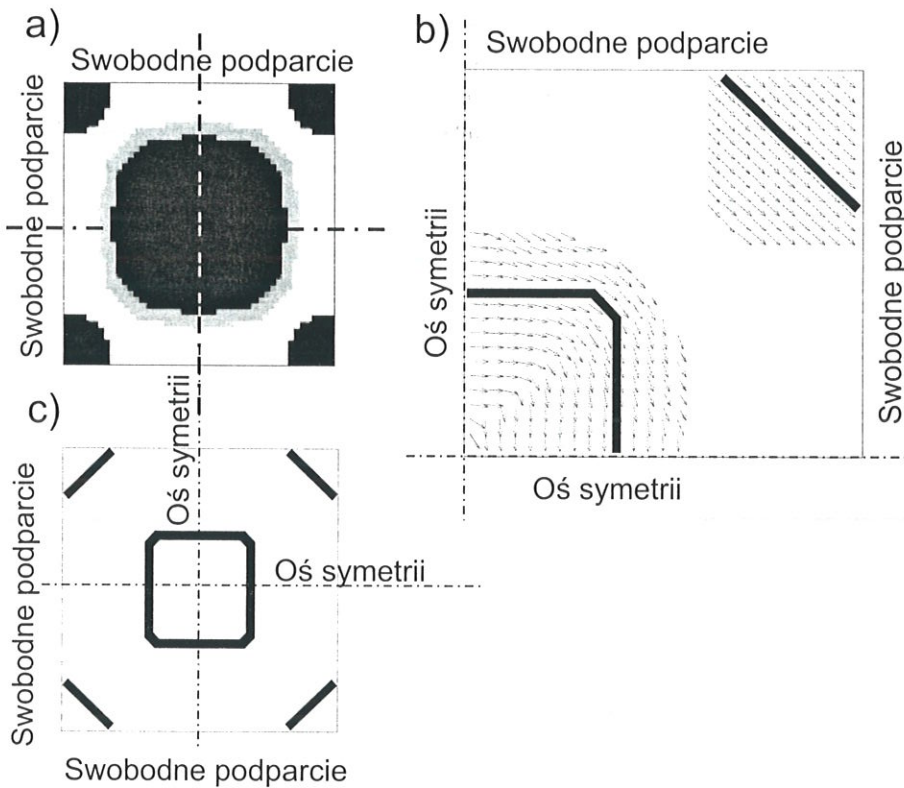
W przedstawionym przypadku spójność układu jest zapewniona poprzez warstwę środkową (rdzeń) płyty zbudowaną z materiału litego. Materiał gromadzi się w okolicach przyłożenia sił i zamocowania płyty.

### 8.4. Optymalizacja topologiczna trójwarstwowej powłoki walcowej

W rozważanym przykładzie trójwarstwowa powłoka obciążona siłą skupioną jest podparta w narożach A, B, C i D. Geometria i wymiary powłoki przedstawione są na rysunku 6. Grubości rdzenia oraz grubości skrajnych warstw są równe  $h_2 = 0,002$  [m] i  $h_1 = 0,0015$  [m],  $E = 2,1 \cdot 10^8$  [N/m<sup>2</sup>],  $\nu = 0,3$ . Dane do zadania optymalizacji topologicznej są następujące:  $p = 3,0, \eta = 0,8, m = 0,04, \xi_e^{min} = 0,001, f = 0,5$ .

Przy stosowaniu technicznej teorii cienkich powłok mało wyniosłych można powierzchnię, która tworzy powłokę, aproksymować elementami płaskimi. Błędy odstępstwa od rzeczywistego kształtu powłoki można niwelować gęstą dyskretyzacją. Modele numeryczne budowane na podstawie powyższych założeń w ramach metody elementów skończonych znalazły szerokie zastosowanie w wielu laboratoryjnych i komercyjnych kodach numerycznych takich jak MARC czy ABAQUS.

Optymalny kształt konstrukcji oraz przebieg całego procesu optymalizacji w kolejnych krokach iteracyjnych przedstawia rysunek 6. Optymalne rozwiązanie uzyskano w 32-gim kroku iteracyjnym. Zaobserwo-



Rysunek 7. Dobór kierunków usztywnień.  
Figure 7. Selection of the stiffeners directions.

wano 75-cio procentowy spadek wartości globalnej podatności. Materiał koncentruje się w narożach powłoki i na jej kalenicy. Spójność układu jest zapewniona poprzez rdzeń wypełniony materiałem litym. W wyniku optymalizacji topologicznej uzyskujemy powłokę o zmiennej grubości.

### 8.5. Dobór kierunków usztywnień

Rozważana jest swobodnie podparta płyta trójwarstwowa obciążona równomiernie obciążeniem  $q = 2000$  [kN/m<sup>2</sup>] (rysunek 7). Wymiary płyty wynoszą 2,0 x 2,0 [m]. Grubość rdzenia jest równa  $h_2 = 0,01$  [m], zaś grubości skrajnych warstw wynoszą  $h_1 = 0,005$  [m].  $E = 210$  [MPa],  $\nu = 0,3$ . W zadaniu optymalizacji topologicznej przyjęto:  $p = 3$ ,  $\eta = 0,8$ ,  $m = 0,02$ ,  $f = 0,6$ ,  $\xi_e^{min} = 1,0 \cdot 10^{-8}$ .

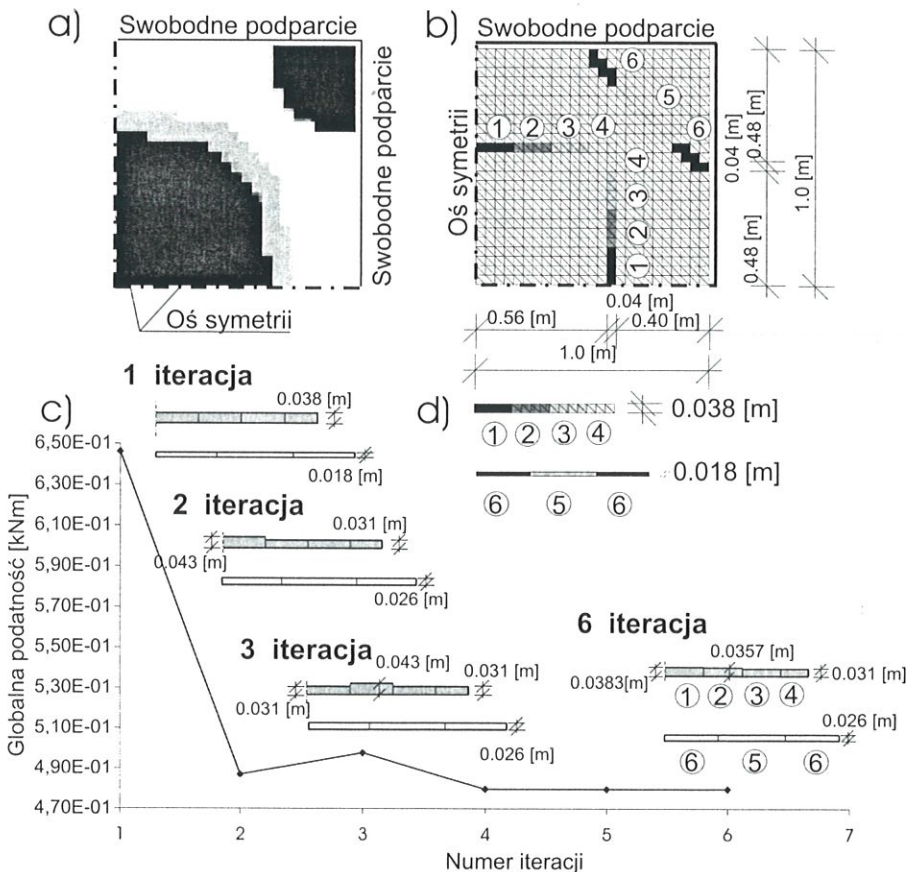
W wyniku optymalizacji uzyskano optymalne rozmieszczenie materiału jak na rysunku 7a. Materiał koncentruje się w narożach i na środku płyty.

Dla płyty o zmiennej grubości określono kierunki naprężeń głównych. Kierunki naprężeń dla 1/4 części układu przedstawiono na rysunku 7b.

Zaproponowany schemat usztywnień dla płyty swobodnie podpartej i równomiernie obciążonej przedstawia rysunek 7c.

### 8.6. Optymalizacja parametryczna usztywnień

Rozważana jest płyta kwadratowa, swobodnie podparta i równomiernie obciążona. Ze względu na symetrię rozważana jest 1/4 część układu. W wyniku optymalizacji topologicznej uzyskano optymalny, globalny kształt płyty, pokazany na rysunku 8.a (patrz także rysunek 7a). Na podstawie kierunków głównych przyjęto



Rysunek 8. Ścieżka minimalizacji globalnej podatności płyty; wyniki dla 1/4 części płyty.  
Figure 8. Compliance minimization path of the quarter of the plate.



schemat usztywnień pokazany na rysunku 8b (patrz także rysunek 7c) Wymiary płyty wynoszą  $a = 2,0$  [m], grubość rdzenia  $h_2 = 0,02$  [m]. W środku płyty usztywnienie podzielono na cztery segmenty 1, 2, 3 i 4 według rysunku 8b. W narożu usztywnienie podzielono na dwa segmenty 5 i 6. Każdy segment żebra ma stałą wysokość  $h_s$ . Segmenty 1, 2, 3 i 4 mają bazową wysokość  $h_s^b$  równą  $0,038$  [m], zaś segmenty 5 i 6 równą  $0,018$  [m] (patrz rysunek 8b). Obszar projektowy zadania jest podzielony na 1250 jednakowych, trójkątnych elementów skończonych o długości boków przystokątnych  $a_e = 0,04$  [m]. Elementy usztywnienia stanowią pogrubione elementy płytowe identyfikowane poprzez macierz  $b_s^e$ . Szerokość i grubość usztywnień jest ustalona. Na podstawie testów przyjęto, że maksymalna wysokość żeber nie powinna przekraczać wartości  $h_s^{max} = 0,045$  [m] tj. około pięciokrotnej grubości rdzenia. Na rysunku 8c przedstawiono ścieżkę optymalizacji wysokości segmentów żeber.

W projekcie optymalnym wysokość segmentów usztywnień maleje wraz z ich odległością od osi symetrii płyty. Optymalne wysokości segmentów usztywnień wynoszą odpowiednio: dla segmentu 1  $h_s = 0,0383$  [m], dla segmentu 2  $h_s = 0,0357$  [m], dla segmentu 3 i 4  $h_s = 0,031$  [m]. Optymalna wysokość segmentów usztywnienia w narożu (5 i 6) jest stała i wynosi  $h_s = 0,026$  [m]. Wysokości segmentów zapewniające układowi maksymalną sztywność przedstawiono na rysunku 8c.

## 8.7. Optymalizacja długości progów ciągowego

Prezentowany przykład dotyczy optymalizacji, przy użyciu analizy wrażliwości Metodą Bezpośredniego Różniczkowania, długości zastępczych progów ciągowych. Blachę dyskretyzowano elementami DKT (Discrete Kirchhoff Triangle). Wymiary geometryczne 1/4 układu, wraz z liniami zastępczych progów ciągowych pokazano na rysunku 9. Każda z linii progów była dyskretyzowana za pomocą 10 elementów belkowych. Prawo konstytutywne opisujące zachowanie materiału blachy dane jest w postaci

$$\bar{\sigma} = 576,79(0,01658 + \bar{\epsilon})^{0,3593} \quad [\text{N/mm}^2]$$

Początkowa grubość blachy wynosiła  $0,81$  [mm], a siła docisku dociskacza dla 1/4 układu  $4,9$  [kN]. Przyjęto współczynnik tarcia opisanego prawem Coulomba równy  $0,162$ . Głębokość tłoczenia wynosiła  $35$  [mm].

Jako funkcję celu w zadaniu optymalizacji przyjęto różnicę prędkości dwóch wybranych węzłów blachy o numerach 745 i 750.

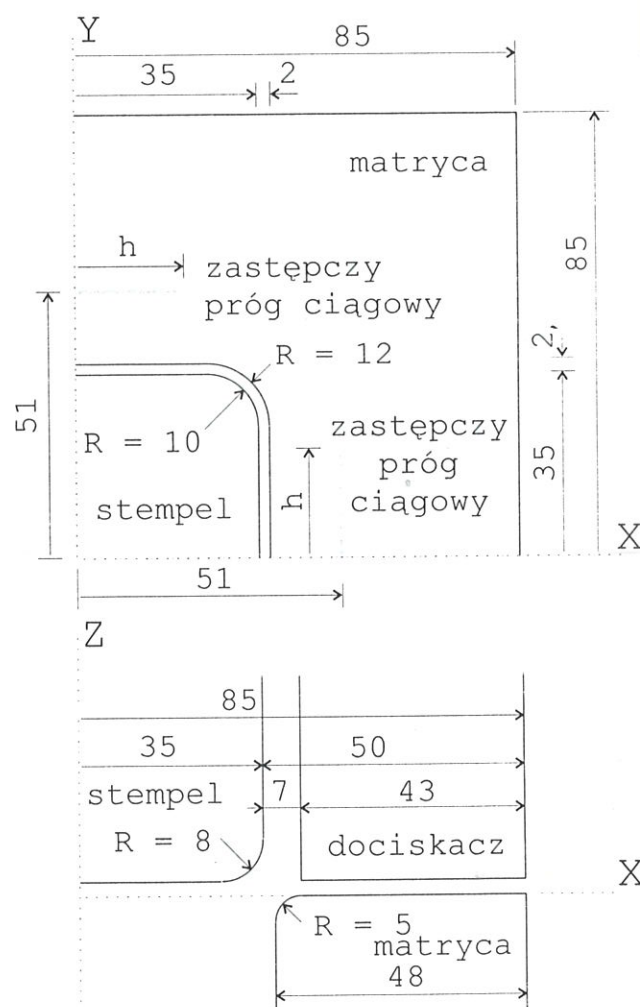
$$\Phi = \dot{q}_{(745)}^x - \dot{q}_{(750)}^x$$

Zmienną projektową  $h$  była długość linii zastępczego progów ciągowego. Ze względu na symetrię przyjęto, że długość obydwu linii progów ciągowego zmienia się w jednakowy sposób. Przyjęto ograniczenia na zmienną projektową  $5 \leq h \leq 25$  [mm]. Wrażliwości funkcji celu liczone były jako

$$\frac{d\Phi}{dh} = \frac{d\dot{q}_{(745)}^x}{dh} - \frac{d\dot{q}_{(750)}^x}{dh}$$

Wyniki analizy wrażliwości wykorzystane były bezpośrednio w optymalizacji długości progów ciągowego.

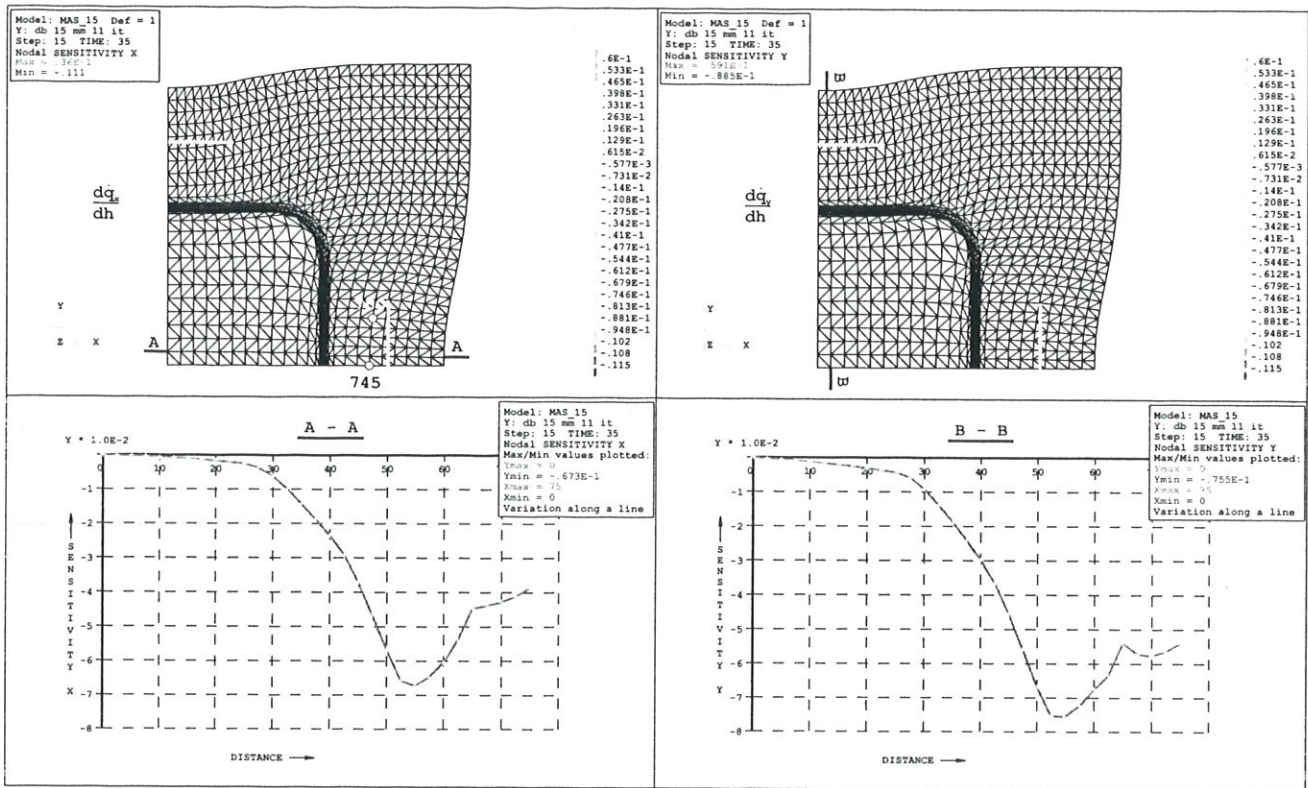
Na rysunku 10 przedstawiono rozkład pola wrażliwości prędkości w węzłach dyskretyzowanej blachy na zburzenia długości progów ciągowego  $h$  odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$  (góra rysunku), oraz wartości wrażliwości  $d\dot{q}_x/dh$  w kolejnych węzłach blachy wzdłuż przekroju A – A i wartości wrażliwości  $d\dot{q}_y/dh$  w kolejnych węzłach blachy wzdłuż przekroju B – B (dół rysunku). Na rysunku tym zaznaczo-



Rysunek 9. Geometria 1/4 układu z zaznaczeniem linii zastępczych progów ciągowych, wymiary podano w [mm].

Figure 9. Geometry of the 1/4 of the square cup deep drawing (equivalent drawbeads marked by lines), dimensions are given in [mm].

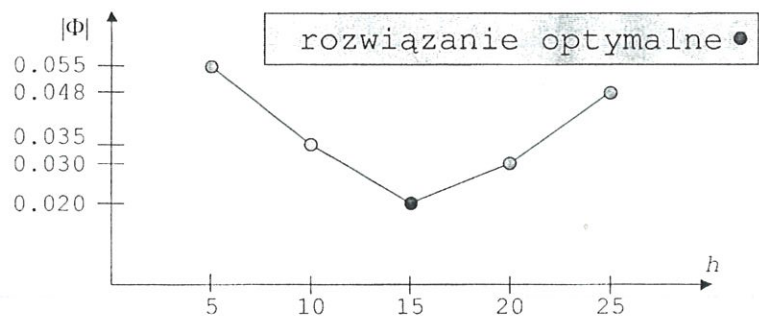




Rysunek 10. Góra: Pola wrażliwości  $dq_x/dh$  i  $dq_y/dh$  w węzłach dyskretyzowanej blachy. Dół: Wykres wrażliwości  $dq_x/dh$  w kolejnych węzłach blachy położonych wzdłuż przekroju A-A i  $dq_y/dh$  wzdłuż przekroju B-B.  
 Figure 10. Upper part of the figure: Sensitivity fields  $dq_x/dh$  and  $dq_y/dh$  in all blank nodes. Lower part of the figure: Sensitivity values  $dq_x/dh$  and  $dq_y/dh$  in nodes of the blank along A-A and B-B cross section respectively.

no również schematycznie położenie węzłów 745 i 750, oraz linii progów ciągowych.

Wartości funkcji celu w kolejnych krokach optymalizacji przedstawiono na rysunku 11, zaś na rysunku 12 wartości gradientów funkcji celu. Optymalne rozwiązanie, czyli minimum funkcji celu, oraz najmniejsze wartości gradientu funkcji celu, uzyskano dla długości progów ciągowych równego 15 [mm].



Rysunek 11: Ścieżka optymalizacji długości progów ciągowych w przestrzeni projektowej.

Figure 11. Optimization path of the drawbead length in the design parameter space.

## 8.8. Optymalizacja widma częstotliwości drgań własnych

Rozważana jest utwierdzona na wszystkich brzegach kwadratowa płyta wzmocniona dwoma żebrami przedstawiona na rysunku 13,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  [MPa],  $\nu = 0,3$ , gęstość  $\rho = 7850$  [kg/m<sup>3</sup>]. Funkcja celu została skonstruowana jako różnica wartości sąsiednich częstotliwości własnych od częstotliwości potencjalnego wymuszenia  $f_b = 1200$  [Hz]. Optymalizacja bazuje na wrażliwości obliczanej metodą różnic skończonych (MRS). Funkcja celu przyjmuje postać:

$$c(x) = \max(\Delta f_i + \Delta f_p) = \min[-(\Delta f_i + \Delta f_p)] \quad (25)$$

gdzie  $\Delta f_i = f_b - f_i$ ,  $\Delta f_p = f_p - f_b$

przy ograniczeniu  $x \in (0,05, 0,375)$

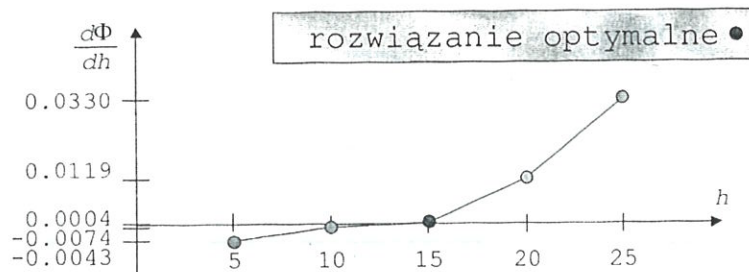
gdzie  $f_i$  i  $f_p$  są częstotliwościami własnymi płyty są-

siednimi do częstotliwości wymuszenia. Zmienna projektowa  $x$  stanowi odległość usztywnienia od lewego brzegu płyty, wartość początkowa wynosi  $x_1 = 0,25$  [m]. Uaktualnienie zmiennej projektowej następuje za pomocą metody ruchomych asymptot. Wrażliwość funkcji celu jest obliczana wg wzoru:

$$c'(x) \cong \frac{\Delta c(x)}{\Delta x} = \frac{c(x_{n+1}) - c(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad (26)$$

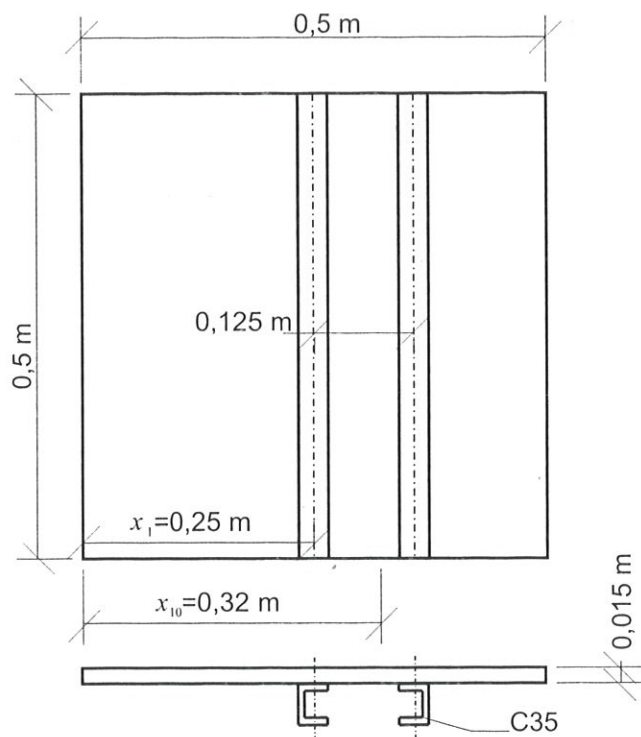
Rezultat obliczeń jest przedstawiony na rysunku 14 jako ścieżka kolejnych przybliżeń do minimalnej war-





Rysunek 12. Wrażliwość funkcji celu (różnicy prędkości węzłów nr 745 i 750) w przestrzeni projektowej.

Figure 12. Sensitivity of the objective function (velocity difference at nodes 745 and 750) in design parameter space.



Rysunek 13. Płyta usztywniona.

Figure 13. Stiffened plate.

tości funkcji celu. Widmo amplitudowe częstotliwości drgań własnych zoptymalizowanej płyty przedstawia rysunek 15. Funkcja celu została spełniona w 10 krokach, optymalne położenie usztywnień opisuje wartość zmiennej projektowej  $x_{10} = 0,32$  [m].

## 9. PODSUMOWANIE

Optymalizacja topologiczna pozwala ustalać wstępne kształty konstrukcji w przypadkach, gdy nie możemy w pełni wykorzystać intuicji inżyniera projektanta i jego doświadczenia.

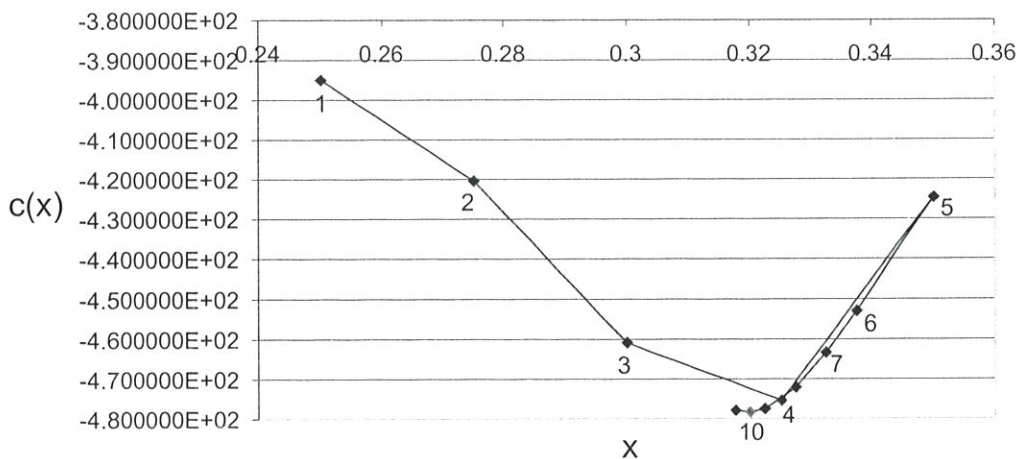
Przedstawiona metoda optymalizacji ma charakter bardzo ogólny. Została wprowadzicie przetestowana na stosunkowo prostych przykładach ale może być stosowana do rozwiązywania znacznie bardziej skomplikowanych zadań.

Powyższy wniosek mógł być sformułowany przede wszystkim dzięki temu, że algorytmy optymalizacyjne zostały sprzężone z najbardziej uniwersalną metodą numeryczną rozwiązywania zadań inżynierskich, jaką jest metoda elementów skończonych.

Zaproponowane podejście określania kierunków usztywnień jest rozwiązaniem przybliżonym. Aby dokładniej określić kierunki i rozmieszczenie usztywnień należałoby dodatkowo przeprowadzić optymalizację parametryczną położenia usztywnień.

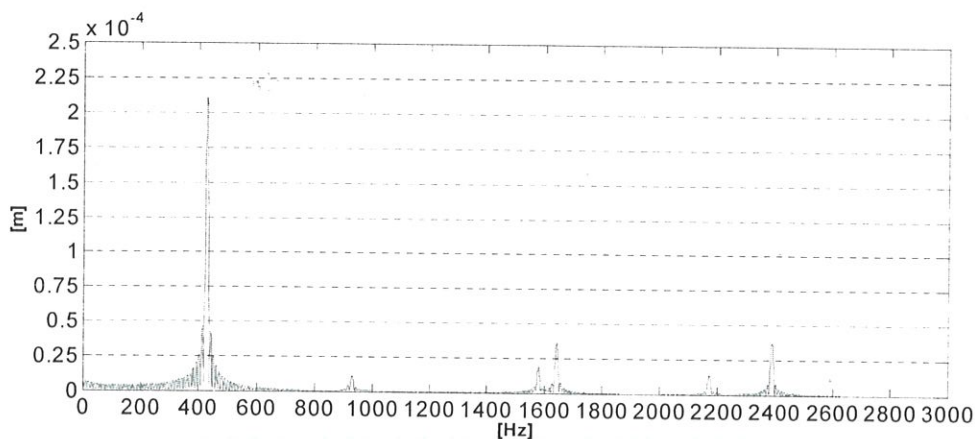
Ostateczny kształt optymalizowanego układu można określić metodami gradientowymi optymalizacji. W przypadku złożonych układów nieliniowych zachodzi potrzeba stosowania algorytmów analizy wrażliwości.

Metoda projektowania ogólnego kształtu przy wykorzystaniu optymalizacji topologicznej jest metodą stosunkowo nową (liczy zaledwie 20 lat). Jednak rozwój tej metody jest niesłychanie dynamiczny.



Rysunek 14. Kolejne wartości funkcji celu i optymalna wartość zmiennej projektowej x.

Figure 14. Consecutive values of the objective function and optimal value of the design parameter x.



Rysunek 15. Widmo amplitudowe drgań własnych płyty usztywnionej.  
Figure 15. Amplitude spectrum of free vibrations of stiffened plate.

## LITERATURA

- Afonso, S., Belblidia, F., Hinton, E., Antonino, G., 2000. A combined structural topology and sizing optimization procedure for optimum plates design. *Materiały konferencyjne ECCOMAS*, Barcelona.
- Bendsoe, M., 1995. *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Hassani, B. Hinton, E., 1999. *Homogenization and Structural Topology Optimization, Theory, Practice and Software*. Springer-Verlag London Limited.
- Kleiber, M., Antunez, H., Hien, T., Kowalczyk, P., 1997. *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. J. Wiley.
- Marczewska, I., 2003. *Wieloetapowa optymalizacja topologii, kształtu i parametrów przekrojowych złożonych konstrukcji zginanych*. Rozprawa doktorska.
- Marczewska, I. Sosnowski, W., 2001. Multi-step optimization of stiffened plates. *European Conference on Computational Mechanics (ECCM)*, Kraków, on CD ROM.
- Marczewska, I., Sosnowski, W., Marczewski, A., Bednarek, T., 2003. Topology and Sensitivity - Based Optimization of Stiffened Plates and Shells, *World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-5)*, Lido di Jesolo, Wenecja.
- Schittkowski, K., 1986. NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research*, 5:485-500.
- Sigmund, O. Jensen, J. S., 2003. Design of acoustic devices by topology optimization, *World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-5)*, Lido di Jesolo, Wenecja.
- Sosnowski, W., Marczewska, I., Marczewski, A., 2002. Sensitivity based optimization of sheet metal forming tools. *Journal of Materials Processing Technology*, 124:319-328.
- Zienkiewicz, O. Taylor, R., 2000. *The finite element method*, 5-th Edition. Butterworth-Heinemann.

Artykuł otrzymano 17 stycznia 2004 r.