

## NUMERYCZNE MODELOWANIE I SYMULACJA PROCESU WYTWARZANIA FORMY PIASKOWEJ W ODLEWANIU METODĄ TRACONEGO MODELU

JERZY ROJEK

### *NUMERICAL MODELLING AND SIMULATION OF SAND MOULD MANUFACTURE PROCESS IN LOST FOAM CASTING*

#### *Abstract*

*This paper presents a numerical model of sand mould manufacture process in lost foam casting. The mould filling with sand and sand compaction by vibration are modelled using spherical (in 3D) or cylindrical (in 2D) discrete elements. The motion of discrete elements is described by means of Newton-Euler equations of rigid body dynamics. Rigid particles interact among one another with contact forces. Numerical simulation predicts defects of the mould due to insufficient sand compaction around the pattern. Combining the discrete element model of sand with the finite element model of the pattern allows us to detect possible distortion of the pattern during mould filling and compaction. Results of numerical simulation are validated by comparison with experimental data.*

### 1. WSTĘP

Odlewanie metodą traconego modelu (zwaną również metodą pełnej formy lub metodą zgazowywanego modelu, ang. lost foam casting) jest technologią, w której stosuje się model ze spienionego polistyrenu (styropianu), pozostający w formie piaskowej w trakcie zalania. Model jest wytapiany i zgazowywany poprzez ciekły metal. Metal wypełnia wnękę formy, zastępując model i odwzorowując jego kształt. Metoda ta ma liczne zalety w porównaniu z innymi technologiami odlewniczymi. Do zalet należy m.in. możliwość uzyskania odlewu o dużej dokładności wykonania, brak

konieczności stosowania obróbki mechanicznej odlewu, wyeliminowanie rdzeni, możliwość wykonania odlewów o skomplikowanych kształtach. Metoda traconego modelu daje tym samym dużą swobodę projektantowi, niedostępną w innych technologiach odlewniczych. Z drugiej jednak strony metoda ta posiada również swoje trudności, do których zaliczają się problemy, związane z wytworzeniem odpowiedniej formy piaskowej.

Proces wytwarzania formy rozpoczyna się od umieszczenia modelu na warstwie piasku. Model jest zasypywany do całkowitego pokrycia suchym sytkim piaskiem. Piasek w celu zagęszczenia poddaje się wi-

bracji. Po zagęszczeniu piasku forma może być zalana metalem.

Zagęszczanie formy piaskowej poprzez wibrację jest jednym z ważniejszych etapów procesu odlewania metodą traconego modelu i może mieć zasadniczy wpływ na jakość odlewu. Wibracja ma zapewnić odpowiednią i równomierną gęstość piasku oraz doprowadzić do wypełnienia przez piasek wszystkich wnęk wokół modelu. Dodatkowym problemem, który może wystąpić w trakcie wytwarzania formy piaskowej, jest możliwość odkształcenia się modelu styropianowego, prowadząca do defektów kształtu odlewu. Nie istnieją ściśle reguły dobrania odpowiednich parametrów i sposobu wibracji, dlatego proces wibracji ustala się metodą prób i błędów.

W pracy zostanie przedstawiony model obliczeniowy, który ma dać możliwość projektowania procesu wytwarzania formy piaskowej w sposób bardziej racjonalny. Model obliczeniowy umożliwia symulacje zasypywania modelu piaskiem i zagęszczania piasku poprzez wibrację.

Innym problemem, na który należy zwrócić uwagę, jest możliwość odkształcenia modelu na skutek nierównomiernego rozkładu obciążenia w czasie zasypywania i wibracji. Możliwość badania tego zjawiska jest również dostępna w modelu numerycznym, prezentowanym w niniejszej pracy.

## 2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA MODELU NUMERYCZNEGO

Celem opracowanego modelu matematycznego jest symulacja procesu zasypywania formy piaskiem oraz zagęszczania piasku poprzez wibrację. Zjawiskami fizycznymi, z którymi mamy do czynienia, jest przepływ materiału sypkiego (piasku) wokół sztywnych lub odkształcalnych obiektów (model, skrzynka) pod wpływem sił ciężkości oraz drgań skrzynki.

Model numeryczny oparty jest na metodzie elementów dyskretnych w jej odmianie wykorzystującej elementy o kształcie kul (w modelu trójwymiarowym) lub walców (w modelu dwuwymiarowym). Piasek reprezentowany jest jako zbiór cząstek przemieszczających się pod wpływem obciążenia zewnętrznego i wzajemnego oddziaływania między sobą poprzez siły kontaktu. Uwzględnione jest oddziaływanie kontaktowe zarówno w kierunku prostopadłym do powierzchni styku, jak i spowodowane tarcie oddziaływanie w kierunku stycznym. Metoda elementów dyskretnych jest powszechnie uznanym narzędziem do modelowania materiałów sypkich (Cundall i Strack, 1979), (Campbell, 1990), (G. Mustoe, 1992), (Williams i O'Connor, 1999).

Spośród różnych możliwości modelowania, włącznie z modelami kontynualnymi, wydaje się, że model numeryczny zbudowany w oparciu o metodę elemen-

tów dyskretnych będzie stanowił najlepsze narzędzie do badania zagęszczania piasku. W trakcie tego procesu, drgania podłoża wzbudzają ruch cząstek poprawiający ich upakowanie, co daje w efekcie wzrost gęstości. Trudno byłoby uwzględnić efekt poprawy upakowania ziaren piasku stosując sformułowanie w ramach mechaniki ośrodka ciągłego.

W opracowanym algorytmie metody elementów dyskretnych jest możliwość stosowania cząstek o różnych wymiarach, co pozwala uwzględnić rozkład wielkości ziaren piasku, aczkolwiek nie pretenduje się do reprezentacji pojedynczych ziaren piasku poprzez cząstki modelu numerycznego. Testy numeryczne pokazują, że model składający się z cząstek znacznie większych niż ziarna piasku oddaje dobrze makroskopowe cechy ruchu materiału sypkiego. W modelowaniu numerycznym dąży się do stosowania możliwie dużej liczby elementów o jak najmniejszych wymiarach, jednak zbyt duży model może prowadzić do bardzo długich czasów obliczeń.

Algorytm metody elementów dyskretnych został implementowany w sposób umożliwiający tworzenie modeli łączących metodę elementów dyskretnych z metodą elementów skończonych. Dzięki temu jest możliwe badanie odkształcania modelu dyskretyzowanego elementami skończonymi w trakcie sypania i zagęszczania piasku modelowanego elementami dyskretnymi.

## 3. SFORMUŁOWANIE METODY ELEMENTÓW DYSKRETNÝCH

Algorytm metody elementów dyskretnych wykorzystujący sztywne elementy cylindryczne lub sferyczne został sformułowany przez Cundalla (Cundall i Strack, 1979; Cundall, 1988). W niniejszej pracy wykorzystywany jest własny algorytm, implementowany w programie metody elementów skończonych Simpack, opartym na jawnym całkowaniu równań ruchu (Rojek i in., 2001).

### 3.1. Równania ruchu

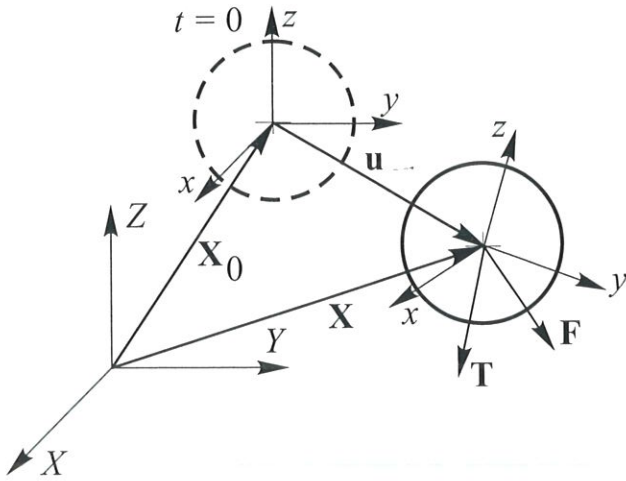
Ruch postępowy i obrotowy sferycznych i cylindrycznych elementów dyskretnych (rys. 1) jest opisany za pomocą równań dynamiki ciała sztywnego Newtona-Eulera, które dla  $i$ -tego elementu można zapisać w następującej postaci:

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i \quad (1)$$

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T}_i \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczenia środka ciężkości elementu w nieruchomym kartezjańskim układzie odniesienia  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  jest wektorem prędkości kątovej,  $m$  jest masą elementu (cząstki),  $I$  jest masowym momen-





Rysunek 1. Ruch sztywnej cząstki.

tem bezwładności,  $\mathbf{F}$  jest wektorem siły wypadkowej i  $\mathbf{T}$  jest wypadkowym momentem sił. Wektory  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{T}$  stanowią sumę wszystkich sił i momentów, działających na  $i$ -ty element, pochodzących od obciążenia zewnętrznego, oddziaływania kontaktowego z sąsiednimi elementami i innymi obiektami, jak również uwzględniają siły o charakterze tłumienia. Postać równania opisującego ruch obrotowy (2) jest prawdziwa dla elementów sferycznych i cylindrycznych i jest uproszczona w stosunku do ogólnej postaci równania Eulera dla dowolnego ciała sztywnego, którego inercja obrotowa jest charakteryzowana poprzez tensor drugiego rzędu.

Równania ruchu (1) i (2) są całkowane w czasie przy zastosowaniu jawnego algorytmu różnic centralnych. Operacja całkowania równania ruchu postępowego (1) w kroku  $n$ -tym wykonywana jest według następującego schematu:

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^n = \frac{\mathbf{F}_i^n}{m_i} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^{n-1/2} + \ddot{\mathbf{u}}_i^n \Delta t \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} \Delta t \quad (5)$$

Dwa pierwsze kroki w schemacie całkowania równania ruchu obrotowego (2) są analogiczne do równań (3) i (4):

$$\dot{\omega}_i^n = \frac{\mathbf{T}_i^n}{I_i} \quad (6)$$

$$\omega_i^{n+1/2} = \omega_i^{n-1/2} + \dot{\omega}_i^n \Delta t \quad (7)$$

Dla płaskiego ruchu obrotowego całkowity kąt obrotu  $\theta_i$  może być wyznaczony w sposób analogiczny jak wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}_i$ :

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \omega_i^{n+1/2} \Delta t \quad (8)$$

W przypadku ruchu trójwymiarowego, położenie katowe nie może być zdefiniowane żadnym wektorem – prędkość katowa  $\omega$  nie może być całkowana, por. (Argyris, 1982). Położenie katowe ruchomego układu współrzędnych  $\mathbf{x}_i$  związanego z ciałem sztywnym względem nieruchomego układu odniesienia  $\mathbf{X}$  można określić za pomocą macierzy obrotu  $\Lambda_i$

$$\mathbf{X} = \Lambda_i \mathbf{x}_i \quad (9)$$

Macierz obrotu  $\Lambda_i$  może być uaktualniana według następującego algorytmu, por. (Argyris, 1982), (Benson i Hallquist, 1986):

$$\Delta\theta_i = \omega_i^{n+1/2} \Delta t \quad (10)$$

$$\Delta\Lambda_i = \cos\|\Delta\theta_i\| \mathbf{1} + \frac{\sin\|\Delta\theta_i\|}{\|\Delta\theta_i\|} \Delta\tilde{\theta}_i + \frac{1 - \cos\|\Delta\theta_i\|}{\|\Delta\theta_i\|^2} \Delta\theta_i \Delta\theta_i^T \quad (11)$$

$$\Lambda_i^{n+1} = \Delta\Lambda_i \Lambda_i^n \quad (12)$$

gdzie  $\Delta\theta = \{\Delta\theta_x \ \Delta\theta_y \ \Delta\theta_z\}^T$  oznacza wektor przyrostowego (małego) obrotu,  $\Delta\Lambda$  jest macierzą przyrostowego obrotu, a  $\Delta\tilde{\theta}$  jest antysymetryczną macierzą zdefiniowaną w następujący sposób

$$\Delta\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 0 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Należy podkreślić, że znajomość całkowitego obrotu cząstki kulistej lub cylindrycznej w wielu przypadkach nie jest konieczna; często wystarcza znajomość przyrostowego obrotu zdefiniowanego wektorem  $\Delta\theta$ . Wtedy kroki (11) i (12) są zbędne, co zmniejsza znacznie koszt numerycznego całkowania równań ruchu obrotowego względem czasu.

### 3.2. Wyznaczenie oddziaływania kontaktowego

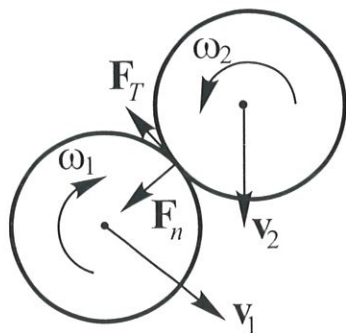
Siły oddziaływania kontaktowego są obliczane dla wszystkich par cząstek, które stykają się ze sobą. Siły występujące w miejscu styku cząstek oznaczonych indeksami 1 i 2 można oznaczyć jako wektory sił  $\mathbf{F}_1$  i  $\mathbf{F}_2$ , które zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona spełniają zależność:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (14)$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$  i rozłożymy siłę  $\mathbf{F}$  na składową normalną i styczną do powierzchni styku, odpowiednio  $\mathbf{F}_n$  i  $\mathbf{F}_T$  (rys. 2)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_T = F_n \mathbf{n} + \mathbf{F}_T,$$

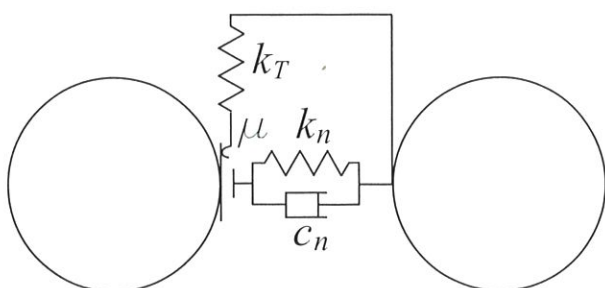
gdzie  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem prostopadłym do



Rysunek 2. Rozkład siły kontaktu na składowe normalną i styczną.

powierzchni styku rozpatrywanych cząstek, przy czym przyjmujemy, że jest on skierowany na zewnątrz cząstki 2.

Siły oddziaływania kontaktowego w kierunku normalnym i stycznym,  $F_n$  i  $F_T$ , są wyznaczane na podstawie przyjętego modelu kontaktu pomiędzy dwoma kulami lub walcami. Model oddziaływania kontaktowego przyjęty w niniejszej pracy można przedstawić schematycznie w sposób pokazany na rysunku 3. Model ten zdefiniowany jest poprzez stałe moduły sztywności w kierunku normalnym  $k_n$  i stycznym  $k_T$ , współczynnik tarcia Coulomba  $\mu$  i współczynnik tłumienia wiskotycznego dla oddziaływania kontaktowego  $c_n$ .



Rysunek 3. Model oddziaływania kontaktowego pomiędzy cząstkami.

Tłumienie oddziaływania kontaktowego rozprasza energię kinetyczną zderzających się cząstek i zmniejsza występujące w układzie drgania. W stosowanym modelu założono jego działanie dla kontaktu w kierunku normalnym, w kierunku stycznym rolę rozpraszania energii kinetycznej spełniają siły tarcia.

Zgodnie z przyjętym modelem można rozłożyć normalną siłę oddziaływania kontaktowego  $F_n$  na część sprężystą  $F_{ne}$  i część określającą wielkość tłumienia  $F_{nd}$

$$F_n = F_{ne} + F_{nd} \quad (15)$$

Część sprężysta  $F_{ne}$  jest proporcjonalna do modułu sztywności w kierunku normalnym  $k_n$  i do penetracji (przenikania) powierzchni zewnętrznych rozpatrywanych cząstek  $u_{rn}$  w miejscu styku

$$F_{ne} = k_n u_{rn} \quad (16)$$

Dla cząstek o kształcie kuli lub walca wzajemną penetrację można wyznaczyć z równania

$$u_{rn} = d - r_1 - r_2, \quad (17)$$

gdzie  $d$  jest odległością środków cząstek, a  $r_1$  i  $r_2$  są ich promieniami. W rozpatrywanym modelu wyklucza się siły kohezji, więc oddziaływanie kontaktowe może zachodzić tylko przy ściskaniu w kierunku normalnym

$$F_{ne} \leq 0. \quad (18)$$

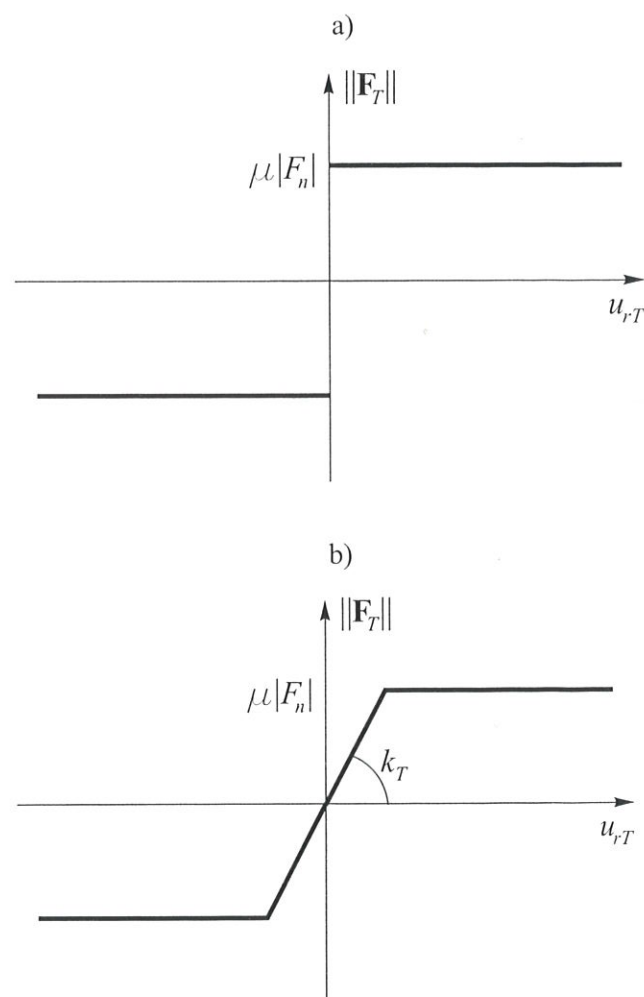
Jeśli jest spełniony warunek  $u_{rn} < 0$ , do wyznaczenia siły normalnej stosuje się równanie (16). W przeciwnym przypadku mamy  $F_{ne} = 0$ .

Przyjęto, że tłumienie w oddziaływaniu kontaktowym ma charakter wiskotyczny (lepkościowy) i jest proporcjonalne do względnej prędkości cząstek w kierunku prostopadłym do powierzchni styku  $v_{rn}$

$$F_{nd} = c_n v_{rn} \quad (19)$$

przy czym prędkość  $v_{rn}$  wyznacza się w następujący sposób

$$v_{rn} = (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \cdot \mathbf{n} \quad (20)$$



Rysunek 4. Zależność siły tarcia od poślizgu a) prawo Coulomba, b) regularyzowane prawo Coulomba.



Wielkość tłumienia może być określona w stosunku do tłumienia krytycznego dla układu dwóch mas  $m_1$  i  $m_2$  połączonych sprężyną o sztywności  $k_n$ , por. (Taylor i Preece, 1992),

$$C_{cr} = 2\sqrt{\frac{m_1 m_2 k_n}{m_1 + m_2}} \quad (21)$$

Siła kontaktu w kierunku stycznym  $\mathbf{F}_T$  jest wywołana tarcieciem przeciwdziałającym poślizgowi w miejscu styku. Poślizg jest charakteryzowany poprzez składową styczną względną prędkości stykających się punktów dwóch cząstek  $\mathbf{v}_{rT}$ , która jest dana następującym wzorem:

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_r \times \mathbf{n}, \quad (22)$$

$$\mathbf{v}_r = (\dot{\mathbf{u}}_2 + \omega_2 \times \mathbf{r}_{c2}) - (\dot{\mathbf{u}}_1 + \omega_1 \times \mathbf{r}_{c1}) \quad (23)$$

gdzie  $\dot{\mathbf{u}}_1$  i  $\dot{\mathbf{u}}_2$  są prędkościami liniowymi środków mas cząstek,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są prędkościami kątowymi cząstek, a  $\mathbf{r}_{c1}$  i  $\mathbf{r}_{c2}$  są wektorami łączącymi środki mas z punktami kontaktu. Całkując względną prędkość styczną  $\mathbf{v}_{rT}$  względem czasu otrzymuje się całkowity poślizg (całkowane względne przemieszczenie styczne w punkcie kontaktu)  $u_{rT}$ .

Zgodnie z klasycznym prawem Coulomba siła tarcia  $\|\mathbf{F}_T\|$  jest proporcjonalna do siły normalnej  $F_n$ , co można zapisać jako:

$$\|\mathbf{F}_T\| = \mu |F_n| \quad (24)$$

Rysunek 4a przedstawia wielkość siły tarcia  $\|\mathbf{F}_T\|$  dla stałej siły nacisku normalnego  $F_n$  w funkcji poślizgu  $u_{rT}$  zgodnie z modelem tarcia Coulomba. Stosowanie tej zależności w modelu numerycznym prowadzi do niefizycznych oscylacji ze zmianami kierunku prędkości poślizgu. Aby temu zapobiec konieczna jest regularyzacja prawa tarcia Coulomba. Jedną z możliwych procedur regularyzacyjnych zakłada rozkład względnej prędkości poślizgu  $\mathbf{v}_{rT}$  na część odwracalną  $\mathbf{v}_{rT}^r$  i nieodwracalną  $\mathbf{v}_{rT}^{ir}$ :

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_{rT}^r + \mathbf{v}_{rT}^{ir} \quad (25)$$

Wychodząc z założenia (25), formułuje się zagadnienie tarcia w sposób analogiczny do zagadnienia sprężysto-plastyczności. Zależność siły tarcia od poślizgu dla modelu tarcia Coulomba po regularyzacji jest pokazana na rysunku 4b. Analogia zagadnienia tarcia do zagadnienia sprężysto-plastyczności pozwala zastosować do wyznaczania wielkości siły tarcia algorytmy numeryczne, opracowane dla wyznaczania naprężeń w materiale sprężysto-plastycznym. Algorytm obliczania siły tarcia rozpoczyna się od wyznaczenia wartości próbnej:

$$\mathbf{F}_T^{trial} = \mathbf{F}_T^{old} - k_T \mathbf{v}_{rT} \Delta t \quad (26)$$

a następnie sprawdzany jest warunek poślizgu

$$\phi^{trial} = \|\mathbf{F}_T^{trial}\| - \mu |F_n| \quad (27)$$

Jeżeli  $\phi^{trial} \leq 0$ , wartość siły tarcia jest równa wartości próbnej

$$\mathbf{F}_T^{new} = \mathbf{F}_T^{trial}, \quad (28)$$

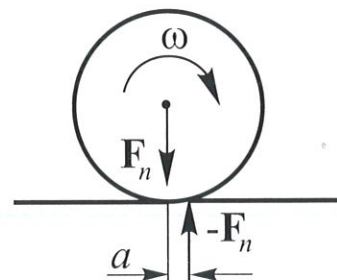
a w przeciwnym przypadku koryguje się wartość siły tarcia według następującego wyrażenia:

$$\mathbf{F}_T^{new} = \mu |F_n| \frac{\mathbf{F}_T^{trial}}{\|\mathbf{F}_T^{trial}\|} \quad (29)$$

### 3.3. Tarcie toczone

Model tarcia poślizgowego nie wprowadza żadnego oporu przy toczeniu bez poślizgu, tzn. gdy względna prędkość w kierunku stycznym w miejscu styku  $\mathbf{v}_{rT}$  jest równa zero. W stosowanym modelu kontaktu opór toczenia spowodowany tarcieciem tocznym jest uwzględniony w sposób przybliżony, poprzez mimośrodowe przesunięcie  $a$ , reakcji normalnej  $F_n$  (rys. 5) dające moment oporu  $M$  o wielkości proporcjonalnej do tego przesunięcia i do siły normalnej

$$M = a |F_n|, \quad (30)$$



Rysunek 5. Opór toczenia spowodowany mimośrodowością reakcji normalnej.

### 3.4. Tłumienie zewnętrzne

Opisane wcześniej tłumienie oddziaływania kontaktowego można traktować jako tłumienie własne (wewnętrzne) materiału sypkiego. Oprócz tego w modelu można zdefiniować tłumienie, mające charakter tłumienia zewnętrznego, reprezentujące opór ośrodka, w którym poruszają się cząstki. Tłumienie to rozprasza energię kinetyczną wszystkich cząstek, bez względu na to, czy znajdują się w kontakcie z innymi cząstkami lub obiektami.

W przyjętym modelu wprowadzono tłumienie zewnętrzne, zarówno wiskotyczne (lepkościowe) jak i



niewiskotyczne (nielepkościowe). W obydwu przypadkach człony wprowadzające tłumienie  $\mathbf{F}_i^{damp}$  i  $\mathbf{T}_i^{damp}$  są dodane do równań ruchu (1) i (2)

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^{damp} \quad (31)$$

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^{damp}, \quad (32)$$

przy czym człony uwzględniające tłumienie są dane następującymi wyrażeniami:

- dla tłumienia wiskotycznego

$$\mathbf{F}_i^{damp} = -\alpha^{vt} m_i \dot{\mathbf{u}}_i \quad (33)$$

$$\mathbf{T}_i^{damp} = -\alpha^{vr} I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (34)$$

- dla tłumienia niewiskotycznego

$$\mathbf{F}_i^{damp} = -\alpha^{nvt} \|\mathbf{F}_i\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_i}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|} \quad (35)$$

$$\mathbf{T}_i^{damp} = -\alpha^{nvr} \|\mathbf{T}_i\| \frac{\dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\|} \quad (36)$$

gdzie  $\alpha^{vt}$ ,  $\alpha^{vr}$ ,  $\alpha^{nvt}$  i  $\alpha^{nvr}$  są odpowiednimi współczynnikami tłumienia. Na podstawie równań (33)–(36) można zauważyć, że zarówno tłumienie wiskotyczne, jak i niewiskotyczne przeciwdziałają ruchowi cząstek, siły tłumienia są skierowane w kierunku przeciwnym do prędkości cząstek. Różnica między przyjętymi w modelu rodzajami tłumienia jest w określeniu wielkości oporu. Tłumienie wiskotyczne jest proporcjonalne do prędkości cząstek, natomiast tłumienie niewiskotyczne jest wyznaczane jako ułamek działającej na cząstkę wypadkowej siły i wypadkowego momentu.

Założenie odpowiedniej wielkości tłumienia jest bardzo istotne do uzyskania quasi-statycznego zachowania się materiału, reprezentowanego przez zbiór cząstek.

### 3.5. Stabilność numeryczna

Jawne całkowanie równań ruchu względem czasu charakteryzuje się dużą efektywnością obliczeniową, dlatego metody jawne umożliwiają stosowanie dużych modeli obliczeniowych. Znaną niedogodnością tych metod jest ich warunkowa stabilność numeryczna. Schemat całkowania numerycznego równań ruchu względem czasu jest stabilny, jeśli przy dowolnych warunkach początkowych i braku obciążeń zewnętrznych, po dowolnie wielu krokach całkowania wszystkie przemieszczenia są ograniczone. W przypadku warunkowej stabilności numerycznej krok całkowania  $\Delta t$  nie może być dłuższy niż pewien graniczny krok zwany krokiem krytycznym  $\Delta t_{cr}$ .

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr}, \quad (37)$$

który zależy od najwyższej częstości drgań własnych systemu dyskretnego  $\omega_{max}$

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (38)$$

Jeśli w układzie występuje tłumienie, krytyczny krok jest dany następującym wyrażeniem:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \left( \sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (39)$$

gdzie parametr  $\xi$ , określający wielkość tłumienia, stanowi stosunek wielkości występującego tłumienia do tłumienia krytycznego, dla drgań swobodnych o częstotliwości  $\omega_{max}$ .

Dokładne wyznaczenie najwyższej częstości własnej  $\omega_{max}$  wymagałoby rozwiązania zagadnienia drgań własnych całego systemu mas (cząstek), połączonych sprężynami o sztywności określonej dla kontaktu między cząstkami. Sprężyny występowałyby tylko między stykającymi się cząstkami. W podejściu przybliżonym zagadnienie drgań własnych może być zdefiniowane oddzielnie dla każdej cząstki

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{k}_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \quad (40)$$

gdzie

$$\mathbf{m}_i = \{m_i, m_i, m_i, I_i, I_i, I_i, I_i\}^T, \quad (41)$$

$$\mathbf{r}_i = \{(u_x)_i, (u_y)_i, (u_z)_i, (\theta_x)_i, (\theta_y)_i, (\theta_z)_i\}^T$$

a  $\mathbf{k}_i$  są macierzami sztywności zawierającymi uwzględniającymi sprężystość kontaktów ze wszystkimi stykającymi się cząstkami sąsiednimi. Równanie (41) definiuje wektory  $\mathbf{m}_i$  i  $\mathbf{r}_i$  dla cząstki kulistej w przestrzeni trójwymiarowej. Dla cząstki walcowej w zagadnieniu płaskim odpowiednie wektory są zdefiniowane jako:

$$\mathbf{m}_i = \{m_i, m_i, I_i\}^T, \quad \mathbf{r}_i = \{(u_x)_i, (u_y)_i, (\theta_x)_i\}^T. \quad (42)$$

Równanie (40) prowadzi do następującego zagadnienia własnego

$$\mathbf{k}_i \mathbf{r}_i = \lambda_j \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i, \quad (43)$$

gdzie wartości własne  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, 6$  w zagadnieniu przestrzennym,  $i, j = 1, 2, 3$  w zagadnieniu płaskim) są kwadratami częstości własnych drgań swobodnych:

$$\lambda_j = \omega_j^2. \quad (44)$$

W zagadnieniu przestrzennym, 3 z 6 częstości  $\omega_j$  odpowiadają drganiom liniowym, a 3 pozostałe drganiom obrotowym.

W implementowanym algorytmie założono następane uproszczenie. Maksymalna częstość drgań własnych jest określona dla systemów dwu mas połączonych sprężynami. W ten sposób mamy równania ruchu z jednym stopniem swobody, oddzielnie rozpatrywane są drgania liniowe i obrotowe:



$$m_i \ddot{u}_n + k_n u_i = 0, \quad (45)$$

$$I_i \ddot{\theta} + k_\theta \theta = 0, \quad (46)$$

Przyjęto, że drgania liniowe są wynikiem oddziaływania kontaktowego normalnego, stąd w równaniu (45) występuje sztywność kontaktu w kierunku normalnym  $k_n$ . Drgania obrotowe są z kolei wynikiem oddziaływania kontaktowego stycznego. Przy tym założeniu można znaleźć zależność pomiędzy sztywnością kontaktu w kierunku stycznym  $k_T$  i występującą w równaniu (46) sztywnością obrotową  $k_\theta$

$$k_n = k_T r^2, \quad (47)$$

gdzie  $r$  jest promieniem cząstki.

Częstość własna drgań liniowych  $\omega_n$  jest określona następującym wyrażeniem:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_i}} \quad (48)$$

a częstość własną drgań obrotowych  $\omega_\theta$  można uzyskać z następującego równania:

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_i}} \quad (49)$$

Przy momencie bezwładności kuli wynoszącym

$$I = \frac{2}{5} m r^2 \quad (50)$$

i sztywności sprężyny kątowej  $k_\theta$ , danej wyrażeniem (47), częstość własna drgań obrotowych  $\omega_\theta$  może być obliczona z następującego wyrażenia:

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{5k_T}{2m_i}} \quad (51)$$

Jeżeli  $k_T = k_n$ , częstość własna drgań obrotowych  $\omega_\theta$  jest około 1,6 razy wyższa niż częstość własna drgań liniowych  $\omega_n$ , dana równaniem (48), a to znaczy, że krok krytyczny dla ruchu obrotowego jest tyle samo razy mniejszy od kroku krytycznego obliczonego dla ruchu postępowego, por. równanie (38). Aby uniknąć tego niekorzystnego uwarunkowania kroku krytycznego przez częstość własną drgań obrotowych, w opracowanym algorytmie numerycznym skaluje się odpowiednio człony bezwładnościowe obrotowe. Koncepcja skalowania obrotowych członów inercyjnych jest powszechnie stosowana dla elementów powłokowych, por. (Hughes, 1987).

### 3.6. Algorytm automatycznego wykrywania kontaktu

Duże przemieszczenia wzajemne cząstek w metodzie elementów dyskretnych powodują konieczność aktualizacji kontaktujących się par cząstek. Poszuki-

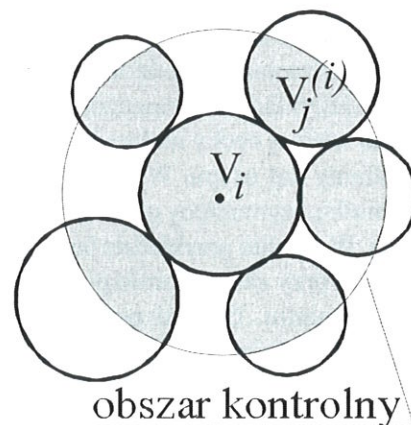
wanie musi być automatyczne i musi się cechować dużą efektywnością, gdyż w przeciwnym przypadku niemożliwa by była symulacja przy zastosowaniu większych modeli. Proste podejście, polegające na sprawdzeniu możliwości kontaktu każdej cząstki ze wszystkimi pozostałymi cząstkami, byłoby bardzo nieefektywne; koszt obliczeniowy takiego algorytmu byłby proporcjonalny do  $n^2$ , gdzie  $n$  jest liczbą elementów. W opracowanym algorytmie sprawdzenie możliwości kontaktu jest poprzedzone sortowaniem przestrzennym wszystkich elementów, opartym na strukturach quad-tree (dla modelu płaskiego) i oct-tree (dla modelu przestrzennego). Posortowanie zbioru umożliwia łatwe zidentyfikowanie znajdujących się w pobliżu elementów – sprawdzenie możliwości kontaktu ogranicza się tylko do tak znalezionego sąsiedztwa. Koszt obliczeniowy takiego algorytmu jest proporcjonalny do  $n \ln n$ .

### 3.7. Obliczanie gęstości

Jednym z interesujących wyników symulacji procesu produkcji formy jest rozkład gęstości, pokazujący efektywność zagęszczania piasku. Dla obliczenia gęstości lokalnej konieczne jest przyjęcie pewnego obszaru kontrolnego, dla którego zostanie obliczona średnia gęstość. W opracowanym modelu przyjęto obszar o kształcie kuli lub walca, o środku pokrywającym się ze środkiem masy rozpatrywanej cząstki i zawierający pewne otoczenie tej cząstki, jak pokazano na rysunku 6. Wtedy średnia gęstość jest wyznaczana na podstawie następującego wyrażenia:

$$\bar{\rho}^{(i)} = \rho \frac{V_c - V_0^{(i)}}{V_c}, \quad V_0^{(i)} = V_c - \sum_j \bar{V}_j^{(i)} \quad (52)$$

Występujące w wyrażeniu (52) przecięcia (wspólne części) obszaru kontrolnego i cząstek  $\bar{V}_j^{(i)}$  są obliczane przy zastosowaniu dokładnych formuł analitycznych.



Rysunek 6. Definicja obszaru kontrolnego dla obliczenia gęstości.





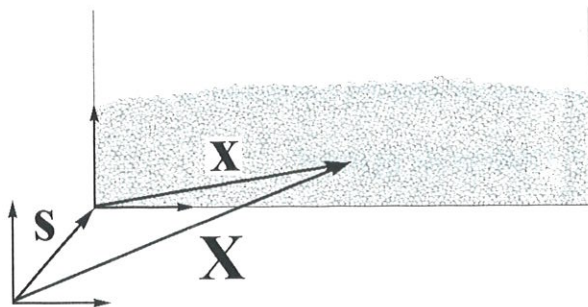
### 3.8. Symulacja zagęszczania piasku poprzez wibrację

W symulacji procesu zagęszczania rozpatruje się ruch piasku wywołany wibracją skrzynki odlewniczej. Można ten proces rozpatrywać względem nieruchomego układu odniesienia  $X$  (rys. 7).

$$M\ddot{X} = F \quad (53)$$

lub też, przyjmując jako układ odniesienia ruchomy układ współrzędnych  $x$  związany ze skrzynką

$$M\ddot{x} = F - M\ddot{s} \quad (54)$$



Rysunek 7. Nieruchomy i ruchomy układ odniesienia w symulacji wibracyjnego zagęszczania piasku.

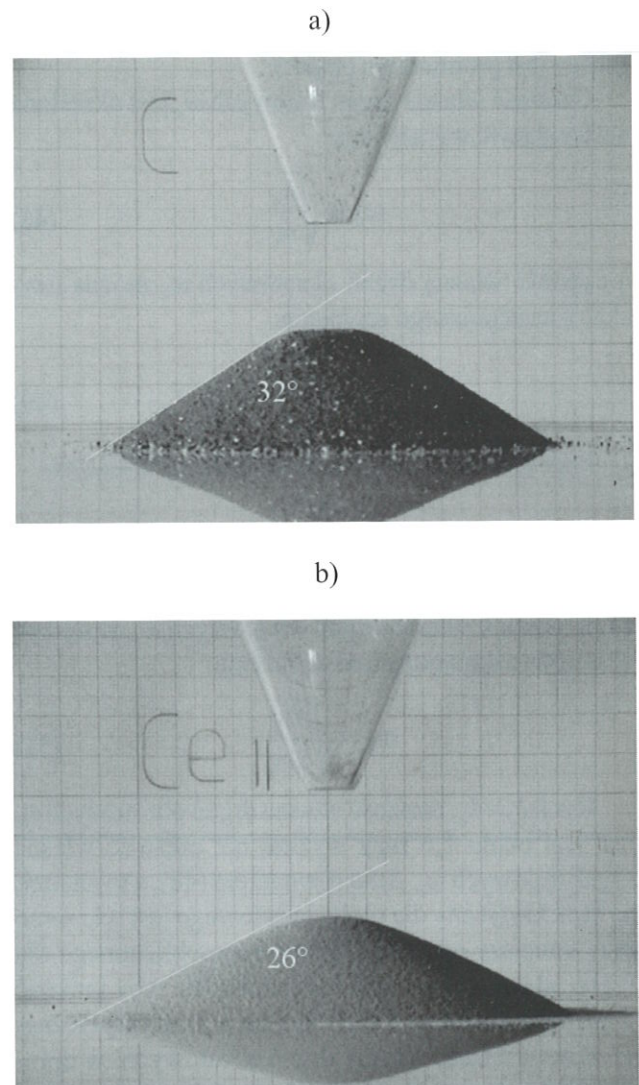
## 4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Algorytm numeryczny metody elementów dyskretnych został implementowany w programie metody elementów skończonych Simpack (SIMPACK, 1997) z jawnym całkowaniem równań ruchu względem czasu. Implementacja ta była możliwa dzięki podobieństwu algorytmów całkowania równań ruchu. W efekcie otrzymano program numeryczny umożliwiający stosowanie modeli łączących metodę elementów dyskretnych z metodą elementów skończonych.

Przeprowadzono wiele obliczeń testowych wykorzystując opracowany model numeryczny. Przedstawione testy weryfikują różne aspekty modelu numerycznego, ważne dla symulacji produkcji form piaskowych w odlewaniu metodą traconego modelu. W pierwszym przykładzie sprawdzono poprawność odwzorowania ważnej cechy makroskopowej piasku, jaką jest naturalny kąt usypu. W drugim przykładzie badano ruch piasku, wymuszony przez wibrację skrzynki odlewniczej. W trzecim przykładzie badano odkształcanie się modelu przy zasypywaniu piaskiem i wibracyjnym zagęszczaniu. Ostatni przykład sprawdza możliwość symulacji dużych zagadnień przestrzennych. Wyniki wszystkich obliczeń numerycznych porównano z wynikami doświadczeń.

### 4.1. Wyznaczanie kąta naturalnego usypu piasku

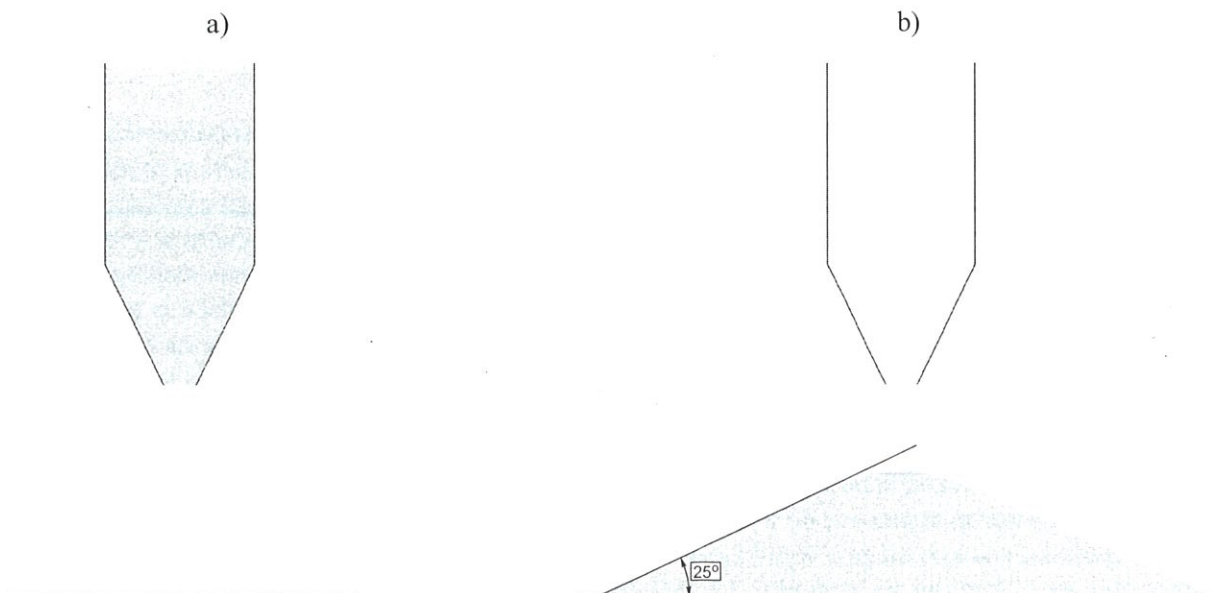
Przeprowadzono proste badania doświadczalne, mające na celu wyznaczenie kąta naturalnego usypu dla różnych rodzajów piasku, stosowanych w różnych odlewniach do produkcji form w procesach odlewania metodą traconego modelu (rys. 8). Otrzymano wartości kąta usypu w zakresie od  $25^\circ$  do  $36^\circ$ , przy czym najniższa wartość  $25\text{--}26^\circ$  charakteryzuje sztuczny materiał sypki Cerabead o regularnym kształcie ziaren.



Rysunek 8. Doświadczalne wyznaczenie kąta naturalnego usypu piasku: a) piasek rzeczywisty, b) piasek sztuczny.

W celu weryfikacji modelu numerycznego przeprowadzono symulacje tych testów, stosując model dwuwymiarowy (rys. 9). Piasek był reprezentowany przez zbiór 10700 elementów walcowych o średnicy od 1 do 4,5 mm; przyjęty rozmiar cząstek w modelu numerycznym jest około czterokrotnie większy od rozmiaru ziaren piasku. Rozkład wielkości cząstek przyjęto zgodnie z rozkładem wielkości ziaren piasku rzeczywistego użytym w analizie sitowej.





Rysunek 9. Numeryczne wyznaczenie kąta naturalnego usypu piasku: a) konfiguracja początkowa, b) konfiguracja końcowa.

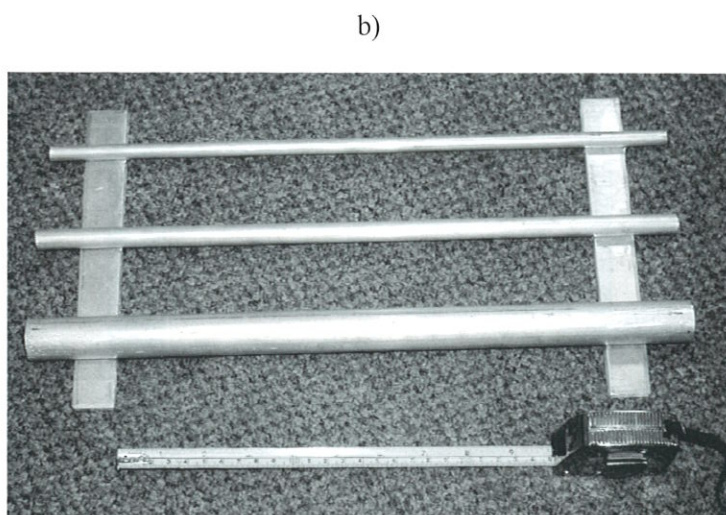
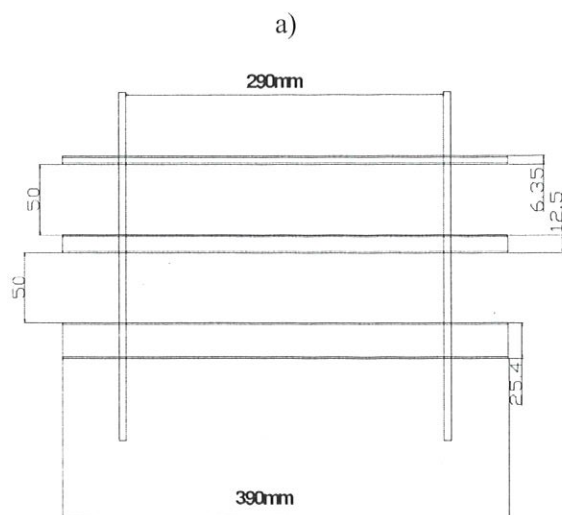
Tablica 1. Parametry modelu do wyznaczenia kąta naturalnego usypu piasku.

$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$k_n$ N/m	$k_T$ N/m	$\mu$	$\xi$	$k_n^p$ N/m	$k_T^p$ N/m	$\mu^p$	$\xi^p$	$a$	$\alpha^{nvt}$	$\alpha^{nvr}$
2400	$7 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	0,8	1,0	$2 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	0,35	0,95	0,1r	0,03	0,3

Test ten miał również na celu dobranie parametrów modelu, w celu uzyskania pożądanego zachowania makroskopowego zbioru elementów dyskretnych modelujących piasek. Parametry modelu gęstość  $\rho$ , sztywność kontaktu między cząstkami  $k_n$  i  $k_T$ , współczynnik tarcia Coulomba  $\mu$ , współczynnik tłumienia kontaktu  $\xi$ , sztywność kontaktu między cząstkami a powierzchniami innych obiektów  $k_n^p$  i  $k_T^p$ , współczynnik tarcia Coulomba  $\mu^p$ , współczynnik tłumienia w kontakcie między cząstkami a powierzchniami  $\xi^p$ , para-

metr mimośrodowości reakcji normalnej  $a$ , współczynniki tłumienia zewnętrznego  $\alpha^{nvt}$  i  $\alpha^{nvr}$  zamieszczono w tablicy 1.

W analizie numerycznej otrzymano kąt naturalnego usypu wynoszący 25° (rys. 9b), co jest bardzo bliskie wartościom rzeczywistym otrzymywanym w eksperymentach. Idealna prawie zgodność występuje dla piasku sztucznego, którego ziarna są najbardziej regularne.



Rysunek 10. Zestaw rur stosowanych w eksperymencie, a) definicja geometrii, b) widok rur.



## 4.2. Ruch piasku w rurach poziomych wzbudzony przez wibrację

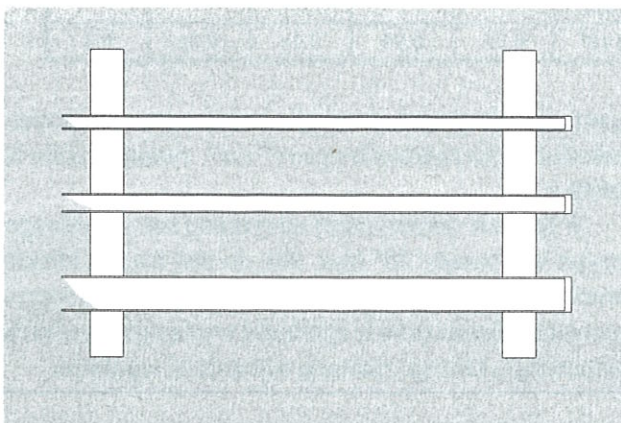
Przeprowadzono symulację numeryczną przemieszczenia się piasku w poziomych rurach (rys. 10) umieszczonych w skrzynce odlewniczej i zasypanych piaskiem pod wpływem drgań skrzynki w kierunku pionowym o częstotliwości 50 Hz i amplitudzie przyspieszenia 150% przyspieszenia grawitacyjnego. Wyniki badań doświadczalnych przedstawia rysunek 11.

W analizie numerycznej badano ruch piasku jedynie w rurze o największej średnicy. Wykorzystano model dwuwymiarowy, w którym zastosowano 64 000 cząstek walcowych o różnej średnicy (rozkład wielkości ziaren przyjęto proporcjonalnie do wyników analizy sitowej piasku rzeczywistego). Wyniki analizy numerycznej są pokazane na rysunku 12. Można zauważyć, że wyniki numeryczne również w tym przypadku charakteryzują się dużą zgodnością z wynikami doświadczalnymi.

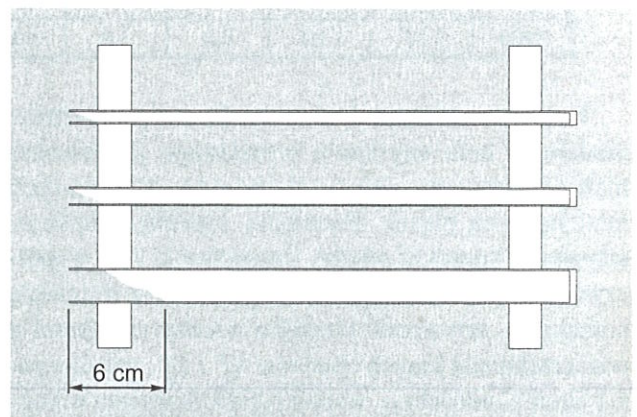
## 4.3. Odkształcanie się modelu w trakcie produkcji formy

Przeprowadzono badania doświadczalne i numeryczne odkształcania się modelu w procesie produkcji formy piaskowej. W badaniach wykorzystano model części o bardzo prostej geometrii w kształcie odwróconej litery L. Kształt i ustawienie modelu miały ułatwić wystąpienie dużych odkształceń w trakcie zasypywania go piaskiem (rys. 13a). Podczas wibracji piasek wypełnia wnękę pod poziomą półką i wyrównuje nieco naciski na model zmniejszając jego odkształcenie (rys. 14a).

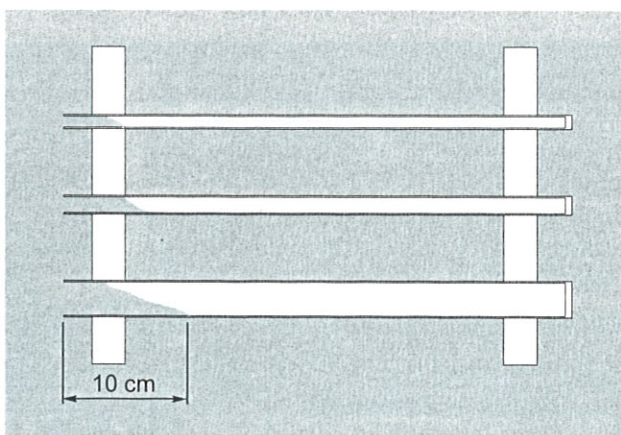
Podobne odkształcenie modelu otrzymuje się w przeprowadzonej symulacji numerycznej. Wyniki numeryczne są przedstawione na rysunkach 13b i 14b. Na rysunku 13b przedstawiony jest odkształcony model z niezapełnioną piaskiem wnęką pod poziomą półką, a rysunek 14b pokazuje kształt modelu i wypełnienie formy piaskiem po wibracji. Wskutek drgań piasek przemieścił się, wypełniając przestrzeń wokół modelu i zmniejszając jego odkształcenie. Rysunki 13 i 14 pokazują bardzo dobrą zgodność między wynikami analizy numerycznej i wynikami badań doświadczalnych.



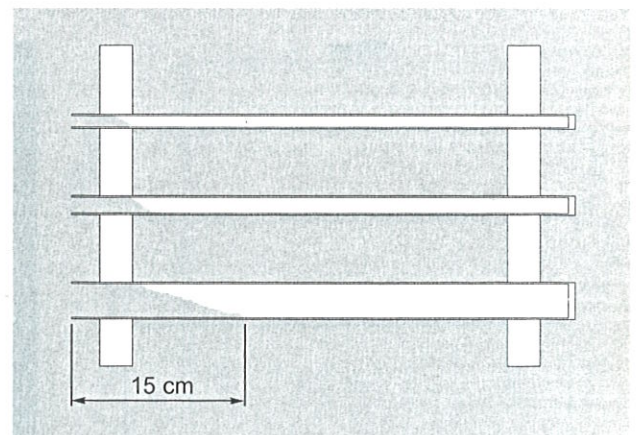
a)  $t = 0$  s



b)  $t = 5$  s



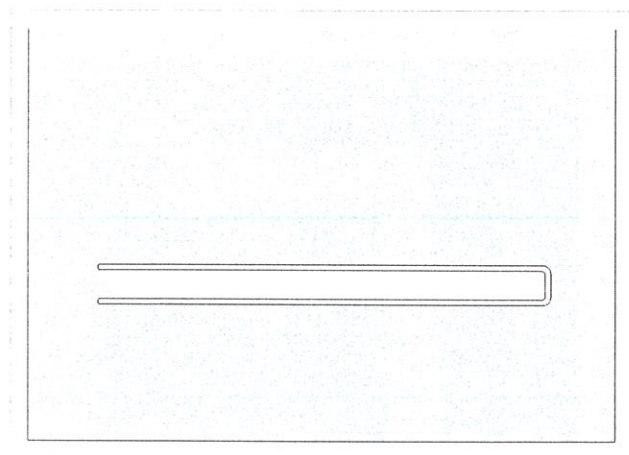
c)  $t = 20$  s



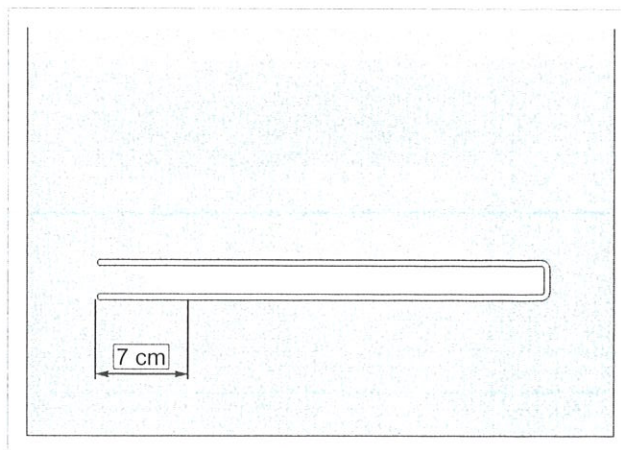
d)  $t = 40$  s

Rysunek 11. Ruch piasku w rurach poziomych wzbudzony przez wibrację – wyniki doświadczalne.

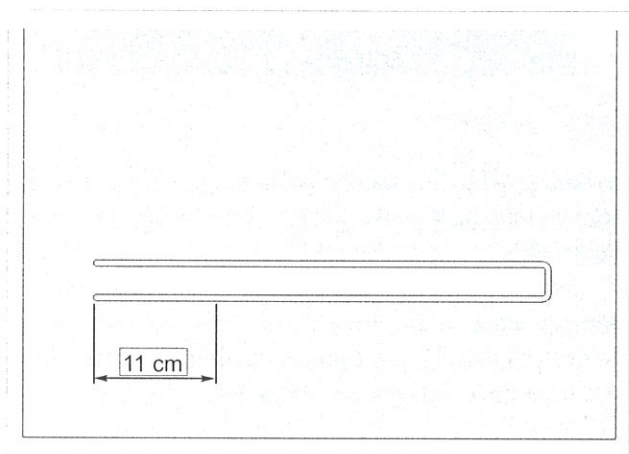




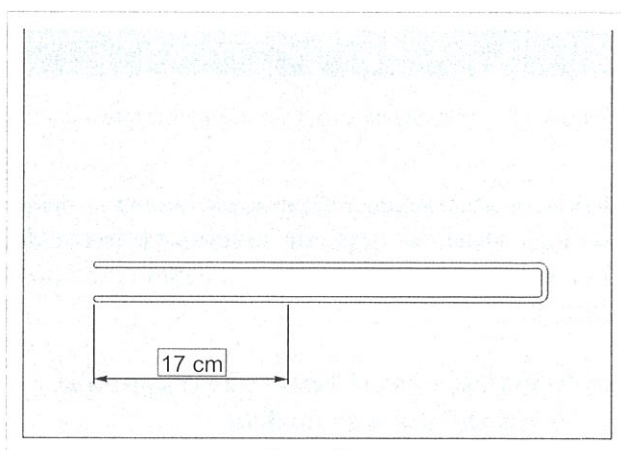
a)  $t = 0$  s



b)  $t = 5$  s



c)  $t = 20$  s



d)  $t = 40$  s

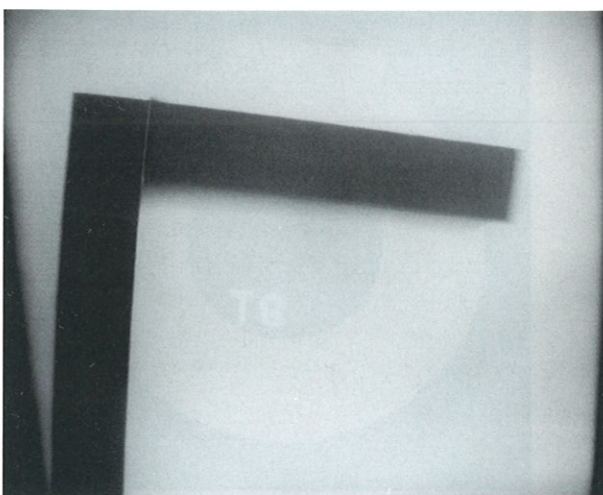
Rysunek 12. Ruch piasku w rurach poziomych wzbudzony przez wibrację - wyniki numeryczne.

Analiza numeryczna była przeprowadzona przy użyciu modelu płaskiego, łączącego metodę elementów dyskretnych i metodę elementów skończonych. Parametry dla modelu piasku były podobne jak w poprzednim przykładzie. Model styropianowy został zdyskretyzowany czworokątnymi elementami, modelującymi

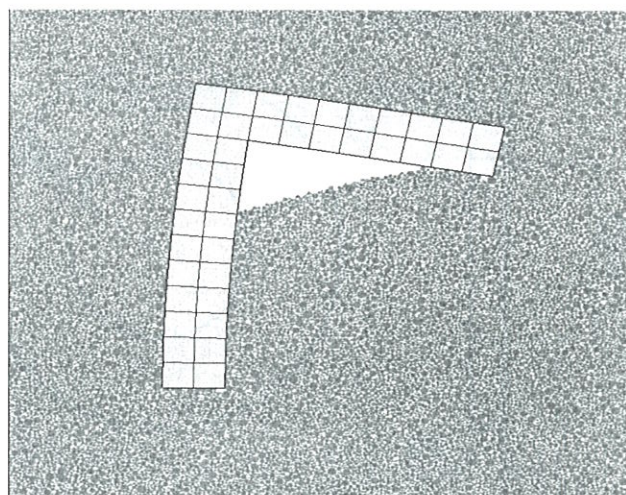
Tablica 2. Właściwości styropianu.

$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$E$ MPa	$\nu$
12	6,4	0,35

a)



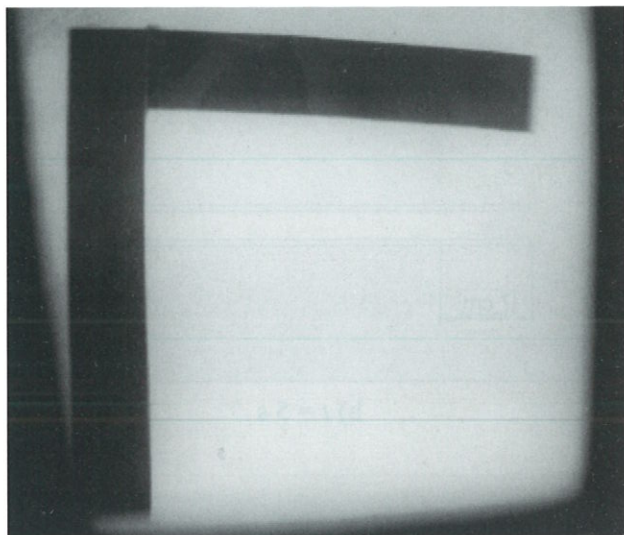
b)



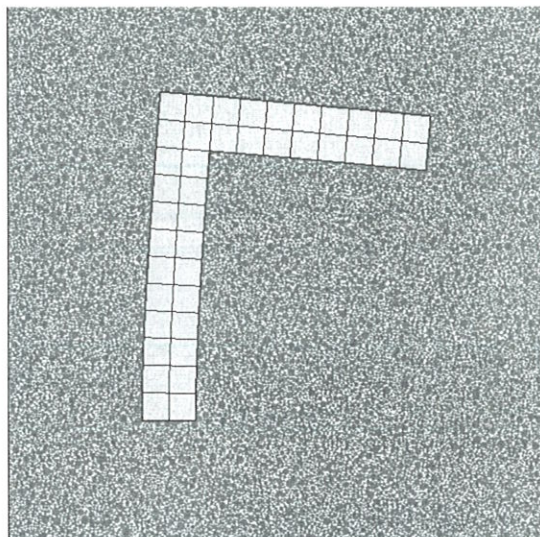
Rysunek 13. Odształcony model po zasypaniu piaskiem: a) doświadczenie, b) symulacja numeryczna.



a)



b)



Rysunek 14. Odkształcony model po vibracji: a) doświadczenie, b) symulacja numeryczna.

płaski stan odkształcenia. Gęstość styropianu wynosi  $\pi$  oraz jego własności sprężyste, określone przez moduł Younga  $E$  i współczynnik Poissona  $\nu$  zamieszczone w tablicy 2.

#### 4.4. Symulacja warstwowego zasypywania trójwymiarowego modelu

Badano doświadczalnie i numerycznie zasypywanie trójwymiarowego modelu o kształcie pierścienia wraz z poziomą półką, pokazanego na rysunku 15. Piasek dodawano do skrzynki odlewniczej warstwami, a między sypaniem kolejnych warstw skrzynkę poddawano vibracji. Dla zaznaczenia warstw stosowano odpowiednio zabarwiony piasek. Na rysunku 16a pokazano przekrój rzeczywistej formy piaskowej z widocznymi war-

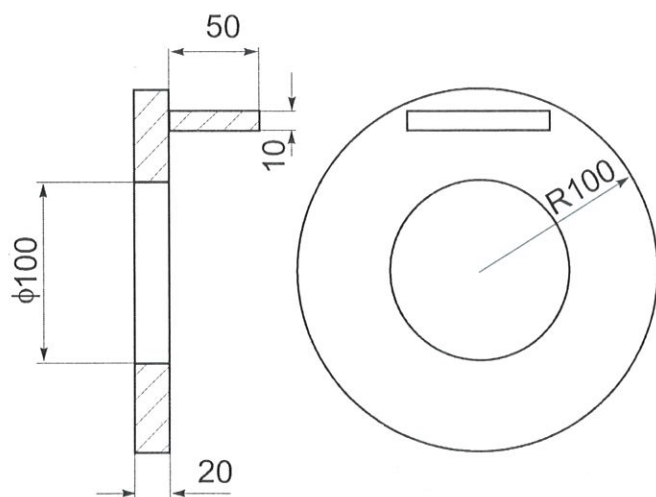
stwami piasku. W analizie numerycznej uzyskano podobne ułożenie warstw piasku, co jest widoczne na rysunku 16b.

Przykład ten pokazuje efektywność numeryczną opracowanego algorytmu i możliwość jego stosowania do dużych modeli – w tym przypadku piasek modelowano stosując 180 tysięcy cząstek.

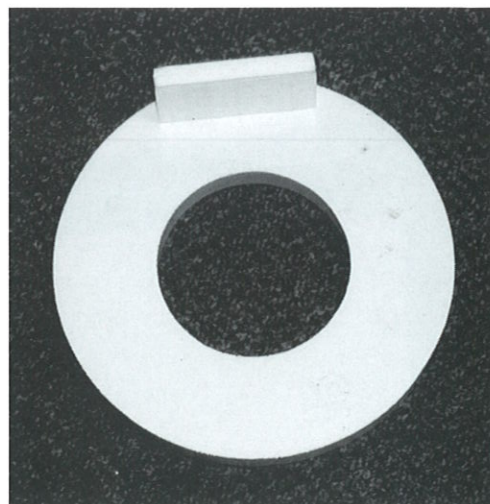
#### 5. PODSUMOWANIE

- Numeryczny model, oparty na metodzie elementów dyskretnych, wykorzystujący elementy o kształcie kul i walców, daje dobre wyniki w zastosowaniu do testowych przykładów produkcji form piaskowych w procesach odlewania metodą traconego modelu. Wyniki numeryczne wykazują dużą zgodność z wynikami doświadczalnymi.

a)

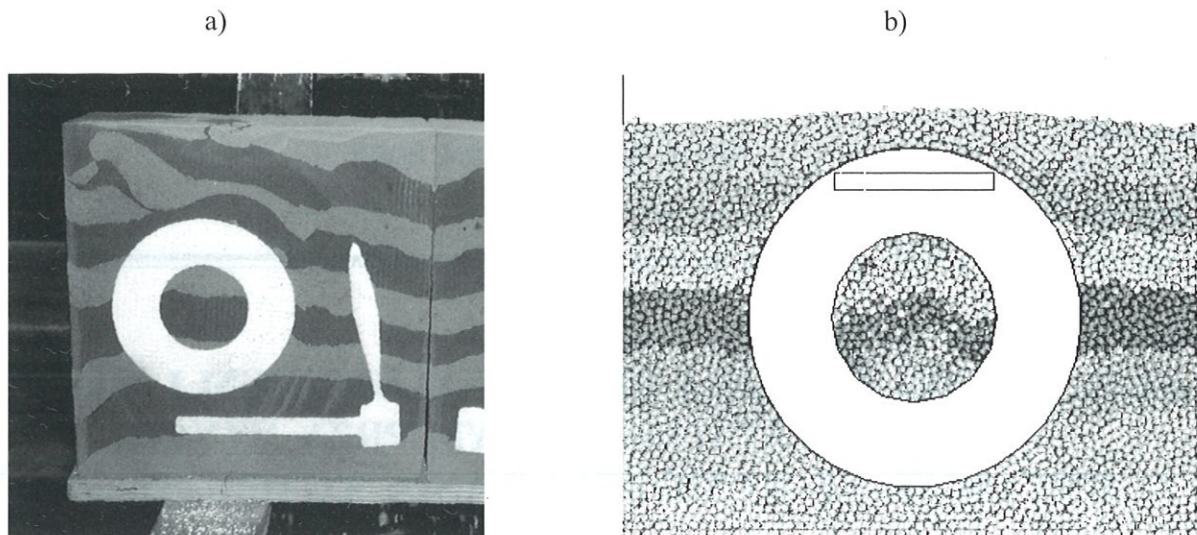


b)



Rysunek 15. Trójwymiarowy model: a) definicja geometrii, b) styropianowy model.





Rysunek 16. Przekrój przez formę z widocznymi warstwami piasku: a) doświadczenie, b) symulacja numeryczna.

- Możliwa jest symulacja zasypywania formy piaskiem, jak i zagęszczania piasku przez wibrację.
- Symulacja numeryczna daje możliwość przewidzenia możliwości defektów formy wskutek niewłaściwego wypełnienia wnek wokół modelu piaskiem. Implementacja komputerowa, pozwalająca łączyć w modelowaniu metodę elementów dyskretnych z metodą elementów skończonych, stwarza możliwość badania możliwych odkształceń styropianowego modelu w trakcie produkcji formy.
- Wyznaczanie optymalnych parametrów procesu produkcji form, np. kierunku, częstotliwości, amplitudy i czasu drgań wymaga dalszych prac badawczych.
- Aczkolwiek algorytm numeryczny charakteryzuje się dużą efektywnością obliczeniową, analiza procesu zagęszczania piasku jest długotrwała, co w chwili obecnej ogranicza zastosowanie metody do stosunkowo prostych geometrii. W przyszłości planowane są prace nad wprowadzeniem obliczeń równoległych.

## PODZIĘKOWANIE

Autor składa podziękowania dla P.M. Haigha and C. Gilbourne'a z *Castings Technology International* w Sheffield oraz P. Verdota z *Huttenes-Albertus France* za udostępnienie wyników badań doświadczalnych, dla kolegów z *CIMNE, Barcelona*, C. Ageleta de Saracibar oraz F. Zarate za współpracę przy tworzeniu modelu numerycznego. Praca została wykonana w ramach europejskiego projektu badawczego GRD1-2000-25243.

## REFERENCES

- Argyris, J., 1982. An excursion roto large rotations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:85-155.
- Benson, D. Hallquist, J., 1986. A simple rigid body algorithm for

- structural dynamics programs. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 12:723-749.
- Campbell, C., 1990. Rapid granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2:57-92.
- Cundall, P., 1988. Formulation of a Three Dimensional Distinct Element Model Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System of Many Polyhedral Blocks. *Int. J. Rock Mech., Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 25(3):107-116.
- Cundall, P Strack, O., 1979. A discrete numerical method for granular assemblies. *Geotechnique*, 2:47-65.
- G. Mustoe, e., 1992. *Eng. Comput.*, 9(2). Special issue.
- Hughes, T., 1987. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamit Analysis*. Prentice-Hall.
- Rojek, J., Oñate, E., Zarate, E, Miquel, J., 2001. Modelling of rock, soil and granular materials using spherical elements. In *2nd European Conference on Computational Mechanics ECCM 2001*, Cracow, 26-29 June.
- SIMPACT, 1997. *User Manual. A finite element code for structures under dynamit and impact loadings*. Report No. 236, CIMNE, Barcelona.
- Taylor, L. Preece, D., 1992. Simulation of blasting induced rock motion. *Eng. Comput.*, 9(2):243-252.
- Williams, J. O'Connor, R., 1999. Discrete element simulation and contact problem. *Arch. Comp. Methods in Engineering*, 6(4).

Artykuł otrzymano 3 października 2003 r.

