

MODYFIKACJA WIELOMIANOWYCH POWIERZCHNI BÉZIERA

BOGUSŁAW BOŻEK, PROKOP ŚRODA

MODIFICATION OF POLYNOMIAL BÉZIER SURFACES

Abstract

In this paper some methods of modification of Bézier two-dimensional surfaces are presented. For surfaces defined on rectangular and triangular domain, two methods of this modification are constructed. These simple methods are applicable in computer graphics.

Wprowadzenie

Problemy modelowania powierzchni występują w wielu dziedzinach nauki i techniki od grafiki komputerowej zaczynając, poprzez architekturę na czystej matematyce kończąc. W grafice komputerowej często wykorzystuje się do tego celu powierzchnie Béziera, które mają tę szczególną cechę, że zmiana położenia jednego tzw. punktu wiodącego (zmiana lokalna) powoduje globalną zmianę kształtu powierzchni.

1 Powierzchnie Béziera

1.1 Wielomiany Bernsteina

Wielomiany Bernsteina są opisane zależnościami:

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i$$

gdzie $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wielomiany te posiadają następującą własność:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

dla $t \in [0, 1]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Jest ona podstawą tzw. algorytmu de Casteljau obliczania położenia punktów krzywej Béziera, którą definiuje

się jako kombinację liniową wielomianów Bernsteina (Bézier, 1972):

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad t \in [0, 1]$$

gdzie $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ są danymi punktami przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 zwanymi punktami wiodącymi.

Podobnie jak przy krzywych Béziera, możliwe jest również określenie powierzchni za pomocą punktów wiodących, przy czym powierzchnie te mogą być wyznaczone na obszarze prostokątnym lub trójkątnym.

1.2 Prostokątne płyty Béziera

Płat powierzchni Béziera S rozpięty nad obszarem prostokątnym $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \subset \mathbb{R}^2$ określa się jako kombinację liniową wielomianów Bernsteina

$$Q(u, v) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot B_j^m(q) \cdot B_i^n(r) \quad (=: \tilde{Q}(q, r))$$

gdzie $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$) są zadanymi punktami wiodącymi powierzchni Béziera, B_i^n , B_j^m są wielomianami Bernsteina odpowiednio

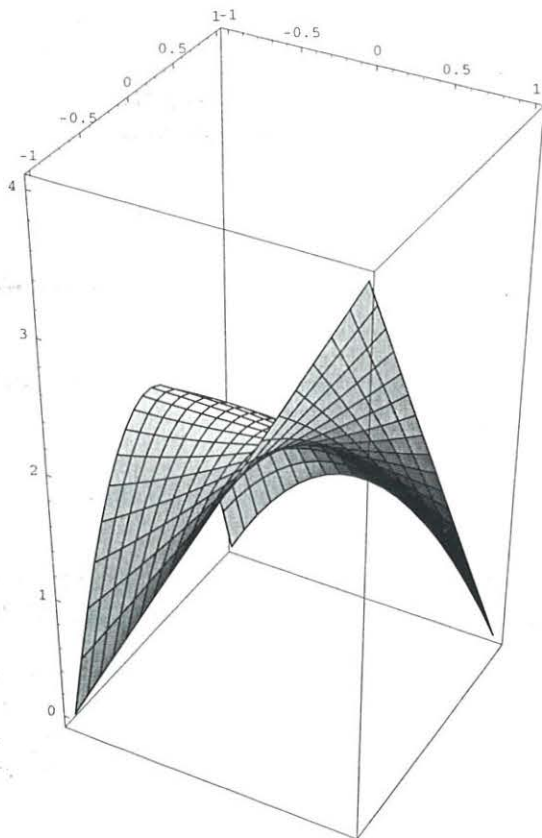
stopnia n , m , $q := \frac{u-u_0}{u_1-u_0}$, $r := \frac{v-v_0}{v_1-v_0}$. Z powyższej definicji wynika, że \tilde{Q} można traktować jako płat powierzchni Béziera rozpięty nad obszarem prostokątnym $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Przykład 1 Dla punktów wiodących:

$$\begin{array}{lll} P_{0,0}(-1, 1, 0), & P_{0,1}(-1, 0, 6), & P_{0,2}(-1, -1, 0) \\ P_{1,0}(0, 1, 2), & P_{1,1}(0, 0, 2), & P_{1,2}(0, -1, 2) \\ P_{2,0}(1, 1, 0), & P_{2,1}(1, 0, 2), & P_{2,2}(1, -1, 4). \end{array}$$

łatwo wyznaczyć bezpośrednim rachunkiem równania rozpiętej na tych punktach powierzchni Béziera:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(q, r) &= 2r - 1 \\ \tilde{y}(q, r) &= 1 - 2q \\ \tilde{z}(q, r) &= 4(1 - q)(1 - r)(r + 3q - 2rq) + \\ &+ 4rq(r + q - rq). \end{aligned}$$



Rysunek 1: Płat powierzchni Béziera z przykładu 1.

1.3 Trójkątne płyty Béziera

Trójkątny płat Béziera określamy przy pomocy wielomianów Bernsteina trzech zmiennych:

$$B_{ijk}^n(q, r, t) := \frac{n!}{i!j!k!} q^i r^j t^k$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $i, j, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ oraz $i + j + k = n$.

Zarówno wielomiany Bernsteina jak i wszystkie kombinacje liniowe tych wielomianów są jednorodne tj.

$$B_{ijk}^n(\alpha q, \alpha r, \alpha t) = \alpha^n B_{ijk}^n(q, r, t)$$

dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Niech A_1, A_2, A_3 będą trzema niewspółliniowymi punktami leżącymi w płaszczyźnie Oxy . Każdy punkt $p \in \mathbb{R}^2$ należący do trójkąta $\Delta_{A_1 A_2 A_3}$ można jednoznacznie określić podając jego współrzędne barycentryczne $(q, r, t) \in [0, 1]^3$, $q + r + t = 1$ względem jego wierzchołków tj. $p = p(q, r, t)$. Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ i niech $P_{ijk} \in \mathbb{R}^3$ będą punktami wiodącymi określonymi zależnością:

$$P_{ijk} = \left(p \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right), z_{ijk} \right),$$

przy czym $i + j + k = n$, a $z_{ijk} \in \mathbb{R}$ są zadanymi liczbami. Jak łatwo policzyć, jest $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ liczb naturalnych i, j, k takich, że $i + j + k = n$. Trójkątny płat Béziera stopnia n określamy wzorem:

$$Q(q, r, t) := \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} P_{ijk} B_{ijk}^n(q, r, t).$$

Algorytm de Casteljau dla płyt trójkątnych. Podobnie jak dla zwykłej krzywej Béziera tak i dla płyt istnieje algorytm Casteljau wyznaczania punktów płyty, który podajemy w postaci pseudokodu:

1. $P_{ijk}^{(0)} \leftarrow P_{ijk}$ dla $i, j, k \geq 0$, $i + j + k = n$,
2. niech $(q, r, t) \in [0, 1]^3$, $q + r + t = 1$,
3. kolejno dla $l = 1$ do $l = n$ wykonaj

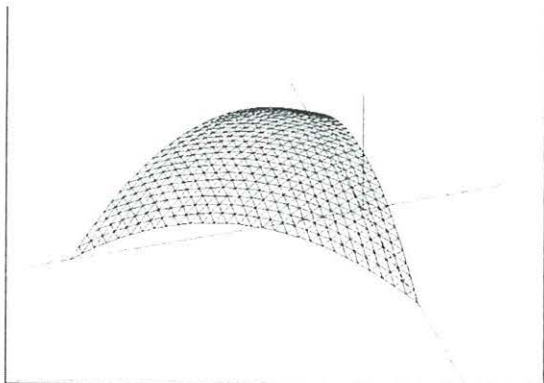
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{kolejno dla } i, j, k \geq 0, i + j + \\ + k = n - l \text{ wykonaj} \\ \left\{ \begin{array}{l} P_{ijk}^{(l)} \leftarrow q P_{i+1, j, k}^{(l-1)} + \\ + r P_{i, j+1, k}^{(l-1)} + t P_{i, j, k+1}^{(l-1)} \end{array} \right. \\ \left. \right\} \end{array} \right.$$

4. $Q(q, r, t) \leftarrow P_{000}^{(n)}$.

Przykład 2 Niech $n = 2$ oraz $A_1 = (-1, 0)$, $A_2 = (1, 0)$, $A_3 = (0, \sqrt{3})$. Łatwo sprawdzić, że $p\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}\right) = A_1$, $p\left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) = A_2$, $p\left(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right) = A_3$, $p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}\right) = (0, 0)$, $p\left(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $p\left(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Kładąc $z_{200} = z_{020} = z_{002} = 0$ oraz $z_{110} = z_{011} = z_{101} = 2$ trójkątny płat powierzchni Béziera ma postać:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(q, r, t) &= r - q \\ \tilde{y}(q, r, t) &= \sqrt{3}t \\ \tilde{z}(q, r, t) &= 4(qr + rt + qt), \end{aligned}$$

dla $q \geq 0$, $r \geq 0$, $t \geq 0$, $q + r + t = 1$.



Rysunek 2: Trójkątny płat Bézeiera z przykładu 2.

2 Modyfikacje powierzchni Bézeiera

Niekiedy zachodzi potrzeba skonstruowania płata powierzchni, który na brzegach spełnia pewne warunki interpolacyjne, tzn. brzeg płata ma przechodzić przez ustalone punkty lub krzywe. Wówczas można zastosować płaty Coonsa (patrz Kiciak, 2000). Autorzy proponują inne rozwiązanie polegające na wstępnym przyjęciu powierzchni Bézeiera i następnie dokonaniu jej modyfikacji w celu uzyskania założonych warunków brzegowych konstruowanego płata powierzchni.

2.1 Modyfikacja płatów prostokątnych

Niech $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ będzie ustalonym wektorem, a f, g, h zadanymi funkcjami takimi, że

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \ni q \rightarrow f(q) \in \mathbb{R}, \\ g &: [0, 1] \ni r \rightarrow g(r) \in \mathbb{R}, \\ h &: [0, 1]^2 \ni (q, r) \rightarrow h(q, r) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

oraz $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$, $h(0, r) = h(1, r) = 0$ dla $r \in [0, 1]$ oraz $h(q, 0) = h(q, 1) = 0$ dla $q \in [0, 1]$.

Definiujemy powierzchnie $Q_i : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2, 3$) wzorami

$$\begin{aligned} Q_1(q, r) &:= Q(q, r) + f(q)w, \\ Q_2(q, r) &:= Q(q, r) + g(r)w, \\ Q_3(q, r) &:= Q(q, r) + h(q, r)w. \end{aligned}$$

Powierzchnie Q_1 i Q_2 możemy nazwać *walcowymi modyfikacjami* powierzchni Bézeiera Q , a Q_3 jej *modyfikacją kopułową*. Szczególny przypadek modyfikacji kopułowej otrzymamy biorąc funkcję h postaci

$$h(q, r) := (f \otimes g)(q, r) = f(q)g(r).$$

W zasadzie nie ma żadnych formalnych ograniczeń odnośnie klasy funkcji użytych do modyfikacji po-

wierzchni Bézeiera, ale skoro jest to powierzchnia wielomianowa, zatem funkcje f, g i h również powinny być wielomianami.

Dowolna funkcja $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ indukuje funkcje określone wzorem.

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} &: [0, 1] \ni t \rightarrow \kappa(t) + (t-1)\kappa(0) - t\kappa(1) \in \mathbb{R}, \\ \hat{\kappa} &: [0, 1] \ni t \rightarrow t(t-1)\kappa(t) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

zerujące się w punktach 0 i 1, które można użyć do walcowej modyfikacji powierzchni Bézeiera. Bez trudu można podać wiele innych przykładów takich normalizacji. Podobnie z dowolnej funkcji $\chi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ można otrzymać funkcję zerującą się na brzegach kostki $[0, 1]^2$ tj. możliwą do zastosowania w kopułowej modyfikacji powierzchni Bézeiera. Przykładowo można to osiągnąć biorąc funkcję:

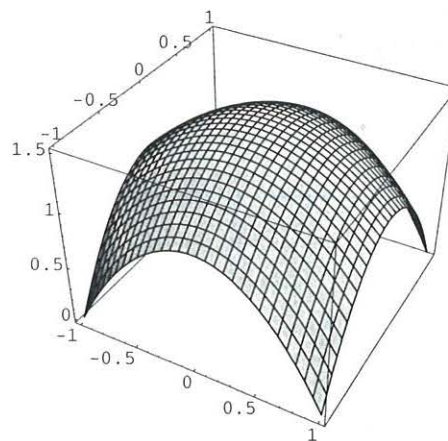
$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(q, r) &= \chi(q, r) + (q-1)\chi(0, r) - q\chi(1, r) + \\ &+ (r-1)\chi(q, 0) - r\chi(q, 1) + \\ &+ (q-1)(r-1)\chi(0, 0) + qr\chi(1, 1) + \\ &- (q-1)r\chi(0, 1) - q(r-1)\chi(1, 0). \end{aligned}$$

Przykład 3 Punkty wodzące

$$\begin{aligned} P_{0,0}(-1, 1, 0), & P_{0,1}(-1, 0, 2), & P_{0,2}(-1, -1, 0) \\ P_{1,0}(0, 1, 2), & P_{1,1}(0, 0, 2), & P_{1,2}(0, -1, 2) \\ P_{2,0}(1, 1, 0), & P_{2,1}(1, 0, 2), & P_{2,2}(1, -1, 0). \end{aligned}$$

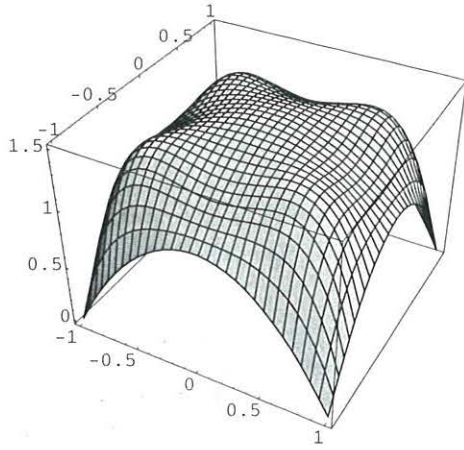
wyznaczają prostokątny płat Bézeiera o równaniu

$$\begin{aligned} \tilde{x}(q, r) &= 2r - 1 \\ \tilde{y}(q, r) &= 1 - 2q \\ \tilde{z}(q, r) &= 4((1-q)q + (1-r)r) + \\ &- 8(1-q)q(1-r)r. \end{aligned}$$



Rysunek 3: Oryginalny płat powierzchni Bézeiera z przykładu 3.

Kładąc $w = (0, 0, 1)^T$ oraz przyjmując $h(q, r) = 1500q(q - \frac{1}{2})(1-q)r(r - \frac{1}{2})(1-r)$ dostajemy zmodyfikowaną (kopułowo) powierzchnię o równaniu $(\tilde{x}, \tilde{y}, \hat{z})(q, r)$, gdzie $\hat{z}(q, r) = \tilde{z}(q, r) + h(q, r)$.



Rysunek 4: Kopułowo zmodyfikowany płat powierzchni Béziera z przykładu 3.

Zaproponowany sposób modyfikacji powierzchni Béziera można wykorzystać do nakładania na nią tekstury, np. pozwala pokryć powierzchnię „blachą trapezową” czy „gontem”.

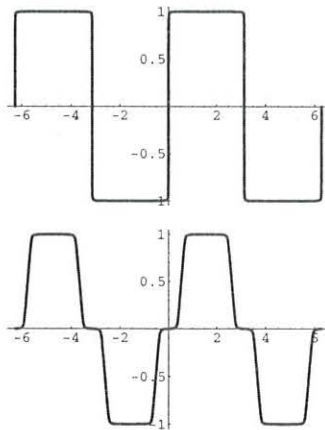
Przykład 4 Definiujemy funkcje (Turban, 1976)

$$\kappa(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2\rho \sin x}{1 - \rho^2},$$

$$\chi(x) = \frac{\arcsin(\rho \sin x)}{\arcsin \rho},$$

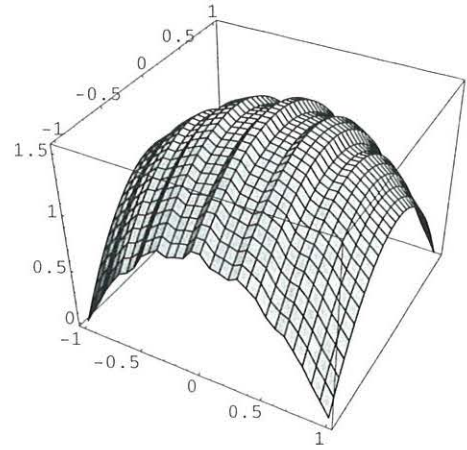
$$\zeta(x) = \frac{\chi(x + \alpha) + \chi(x - \alpha) - \chi(x + \beta) - \chi(x - \beta)}{2(\chi(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \chi(\frac{\pi}{2} + \beta))},$$

gdzie $\rho \in (0, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametry. Wykresy funkcji κ i ζ dla $\rho = 0.999$, $\gamma = \frac{\pi}{20}$, $\alpha = \frac{\pi}{3} - \gamma$, $\beta = \frac{\pi}{3} + \gamma$ przedstawia rysunek poniżej.



Rysunek 5: Wykresy funkcji κ i ζ z przykładu 4.

Imitację „blachy trapezowej” dostajemy kładąc na przykład $h(q, r) := \kappa(q)$ lub $h(q, r) := \zeta(q)$, $h(q, r) := |\zeta(q)|$. Rysunek poniżej w przejawskrawiony sposób prezentuje walcową modyfikację powierzchni Béziera, w której $w = (0, 0, 1)^T$ a funkcja $h(q, r) = \frac{\pi}{20} \zeta(10^5 q)$.

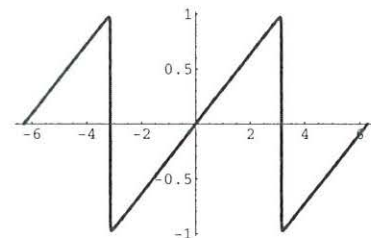


Rysunek 6: Tekstura z przykładu 4.

Do imitacji „gontu” można z kolei wykorzystać np. pilokształtną funkcję

$$\xi(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\rho \sin x}{1 + \rho \cos x}$$

z $\rho = 0.999$.



Rysunek 7: Funkcja ξ z przykładu 4.

2.2 Modyfikacja płatów trójkątnych

Niech $w \in \mathbb{R}^4$, $w \neq 0$ będzie ustalonym wektorem, a f, h, s zadanymi funkcjami takimi, że

$$f: [0, 1] \ni q \rightarrow f(q) \in \mathbb{R},$$

$$h: [0, 1]^2 \ni (t_1, t_2) \rightarrow h(t_1, t_2) \in \mathbb{R},$$

$$s: [0, 1]^2 \ni (t_1, t_2, t_3) \rightarrow s(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R},$$

oraz $f(0) = f(1) = 0$, $h(0, t) = h(1, t) = 0$ dla $t \in [0, 1]$ oraz $h(t, 0) = h(t, 1) = 0$ dla $t \in [0, 1]$, $s(0, t_2, t_3) = s(1, t_2, t_3) = 0$, $s(t_1, 0, t_3) = s(t_1, 1, t_3) = 0$, $s(t_1, t_2, 0) = s(t_1, t_2, 1) = 0$.

Definiujemy powierzchnie $Q_i: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 1, \dots, 7$) wzorami:

$$Q_1(q, r, t) := Q(q, r, t) + f(q)w,$$

$$Q_2(q, r, t) := Q(q, r, t) + f(r)w,$$

$$Q_3(q, r, t) := Q(q, r, t) + f(t)w,$$

$$Q_4(q, r, t) := Q(q, r, t) + h(q, r)w,$$

$$Q_5(q, r, t) := Q(q, r, t) + h(q, t)w,$$

$$Q_6(q, r, t) := Q(q, r, t) + h(r, t)w,$$

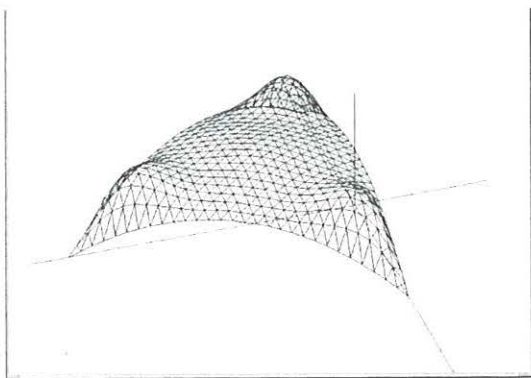
$$Q_7(q, r, t) := Q(q, r, t) + s(q, r, t)w.$$

Powierzchnie Q_1, Q_2, Q_3 nazwamy krawędziowymi modyfikacjami trójkątnych płatów Béziera, Q_4, Q_5, Q_6 dwukrawędziowymi modyfikacjami, a Q_7 modyfikacją trójkrawędziową lub kopułową.

Przykład 5 Niech $w = (0, 0, \rho)^T$ i niech $s(q, r, t) = q(q - \frac{1}{2})^2(q - 1)r(r - \frac{1}{2})^2(r - 1)t(t - \frac{1}{2})^2(t - 1)$. Wówczas powierzchnia określona wzorem

$$\begin{aligned}\tilde{x}(q, r, t) &= r - q \\ \tilde{y}(q, r, t) &= \sqrt{3}t \\ \tilde{z}(q, r, t) &= 4(qr + rt + qt) + \rho \cdot s(q, r, t),\end{aligned}$$

dla $q \geq 0, r \geq 0, t \geq 0, q + r + t = 1$, jest kopułowo zmodyfikowanym trójkątnym płatem Béziera z przykładu 2.



Rysunek 8: Zmodyfikowany trójkątny płatek Béziera z przykładu 5.

Podsumowanie

Zaproponowana metoda modyfikacji prostokątnych i trójkątnych płatów powierzchni Béziera jest naturalnym rozwinięciem idei z pracy Bożek i Środa, 2002. Pozwala w prosty sposób uelastycznić dobór kształtu konstruowanej powierzchni co może mieć liczne zastosowania w grafice komputerowej.

Literatura

- Bézier P., 1972, *Numerical control - mathematics and applications*, John Wiley and Sons, London.
- Bożek B., Środa P., 2002, *Modyfikacja wielomianowych krzywych Béziera*, Informatyka w Technologii Materiałów, 2, 34 - 37.
- Kiciak P., 2000, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni - zastosowania w grafice komputerowej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Środa P., Bożek B., 1999, *Krzywe i powierzchnie Béziera*, Konferencja o geometrii, Częstochowa 24-25 września 1999 r, Politechnika Częstochowska, Konferencje 34, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 219 - 226.
- Turban K.A., 1976, *Schwingungen mit serraphilen Kurvenformen*, ETZ-A Bd. 97, 350 - 357.

Artykuł otrzymano 20 grudnia 2002 r.