

## MODELE PLAZMY TERMICZNEJ W SPAWANIU I PLAZMOWEJ OBRÓBCE POWIERZCHNIOWEJ. CZĘŚĆ I

J. RONDA

### MODELS OF THERMAL PLASMA IN WELDING AND SURFACE PROCESSING. PART I

#### Abstract

*The intensity of a heat flux transmitted from ionized gas through a liquid metal to a heat affected zone decides about the quality of a weld joint or the integrity of surface layers in plasma surface processing. Following that, the numerical simulation of a weld joint with the required quality should be based on the enhanced model of a heat transmission from the plasma to the heat affected zone through all intermediate regions. The complex model should contain the sub-model of the electric arc with sheaths, the sub-model of a liquid metal motion in the electromagnetic field, and the sub-model of the coupled thermo-mechano-metallurgical processes in the heat affected zone. Additionally, in plasma spraying, the transportation of an injected powder particles or a gas contributing to a surface coating and their impact (or impingement) on the processed surface should be included in the process complex model. The energy transmission is associated by many processes occurring in the ionized gas and related to the thermodynamics of reacting gases, fluid electro-dynamics and micro-metallurgy.*

## 1. WSTĘP

### 1.1 Plazma termiczna w łuku elektrycznym

Wszystkie rodzaje plazmy wytwarzane w łuku elektrycznym; w czasie spawania; są sklasyfikowane w literaturze amerykańskiej i europejskiej jako „gorące” plazmy. Te same rodzaje plazmy w literaturze rosyjskiej nazywa się plazmami „niskotemperaturowymi”; aby odróżnić je od plazmy termo-nuklearnej. Plazmy spawalnicze należą do podgrupy znanej jako plazmy termiczne, których cząsteczki znajdują się w stanie lokalnej równowagi termodynamicznej (LRT) lub bliskich temu stanowi. Załada się, że plazma w LRT jest w stanie równowagi kinetycznej, w równo-

wadze wzbudzenia, oraz równowadze jonizacyjnej, co przedstawiono w tablicy 1.

Plazmy termiczne są w stanie równowagi kinetycznej ze względu na ogromną ilość zderzeń oraz w równowadze radiacyjnej. Ciśnienie w takiej plazmie jest bliskie ciśnieniu atmosferycznemu. Ogólnie stan plazmy termicznej jest określony przez następujące zmienne konstytutywne:

$\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  – prędkość

$T$  – temperatura

$\mathbf{n} = (n^{(e)}, n^{(i)})$  – udziały fazowe w plazmie

Udziały fazowe w plazmie ( $n^{(e)}, n^{(i)}$ ) są zależne od ciśnienia  $P$ , entalpii  $h$ , gęstości prądu  $\mathbf{J}$ , potencjału elektrycznego  $V$  i pola magnetycznego  $\mathbf{B}$ .

Opis ten jest poprawny dla modelu plazmy składającej się z pojedynczego płynu przewodzącego, co

Tablica 1. Możliwe stany równowagi plazmy.

Typ równowagi	Założenia	Wymagania
Równowaga kinematyczna	Temperatura w każdej cząsteczce gęstej, kolizyjnej (zdominowanej przez zderzenia) plazmy wysokotemperaturowej jest zgodna z Maxwellowskim rozkładem temperatury.	Porcja energii przejmowana przez elektrony, w czasie drogi między kolejnymi zderzeniami, powinna być bardzo mała w porównaniu z energią termiczną elektronów.
Równowaga wzbudzenia	Każdy proces, który może doprowadzić do wzbudzenia lub wyładowania ("de-excitation") jest brany pod uwagę: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wzbudzenie: <ul style="list-style-type: none"> <li>– kolizje elektronów,</li> <li>– foto-absorpcja (pochląnianie),</li> </ul> </li> <li>• Rozładowanie ("de-excitation"): <ul style="list-style-type: none"> <li>– kolizje drugiego rodzaju;</li> <li>– foto-emisje;</li> </ul> </li> </ul>	Sumy mechanizmów wzbudzenia i wyładowania powinny być równe dla procesów zdominowanych przez kolizje (Boltzman'owski rozkład gęstości populacji).
Równowaga jonizacyjna	Rozpatruje się tylko najbardziej wyróżniające się mechanizmy prowadzące do jonizacji i rekombinacji: <ul style="list-style-type: none"> <li>• jonizacja: <ul style="list-style-type: none"> <li>– kolizje elektronów;</li> <li>– foto-absorpcja,</li> </ul> </li> <li>• rekombinacja: <ul style="list-style-type: none"> <li>– rekombinacja trzech ciał (elektronów, ciężkich jonów i wolnych elektronów lub cząsteczek neutralnych),</li> <li>– foto-rekombinacja.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gęstości elektronów, w przypadku odpowiednio dużych gęstości, określa się z równania Sahy.</li> <li>• Dla mniejszych gęstości stosuje się wzór, jak dla wyładowania koronowego.</li> </ul>

mieści się w ramach magneto-hydro-dynamicznej (MHD) teorii płynięcia, gdzie temperatura strumienia elektronów jest taka sama jak temperatura jonów, tzn.  $T^{(e)} \equiv T^{(i)} = T$ .

Skład plazmy i jej gęstość są jednoznacznie funkcjami temperatury w obszarach, gdzie stany plazmy mogą być zakwalifikowane jako zbliżone do stanu lokalnej równowagi termodynamicznej (LRT). Kiedy plazma oddziałuje z ciałem stałym lub płynem znajdującym się na granicy obszaru, warstwy brzegowe są obszarami nierównowagi. Dlatego obszar łuku elektrycznego dzieli się na podobszary: powłokę katodową z ładunkiem przestrzennym, podpłótkę katodową, kolumnę łuku elektrycznego, podpłótkę anodową, powłokę anodową z ładunkiem przestrzennym. Kolumnę łuku, dzięki symetrii oraz quasi-laminarnemu przepływowi w rdzeniu łuku, można opisać stosując dwuwymiarowe modele przepływu plazmy. Zachowanie plazmy w turbulentnych obszarach w pobliżu katody i anody, gdzie stany plazmy są dalekie od LRT, powinny być opisywane przez modele trójwymiarowe. W równaniach bilansu dla plazmy termicznej niezbędne są dwa człony: siły indukowane magnetycznie  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  (w równaniu zachowania pędu), ciepło Joule'a  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  (w równaniu bilansu energii). Równania bilansu są dla plazmy nieliniowymi, cząstkowymi równaniami różniczkowymi, ponieważ charakterystyki termodynamiczne i właściwości transportowe plazmy są silnie zależne od temperatury. Obecność ciepła Joule'a wymaga, aby prawo Ohm'a

wyrażało zależność między gęstością prądu (i potencjałem) oraz bilansem strumienia dla prądu stałego. Dla opisu wyładowania z częstotliwościami radioelektrycznymi (radio-frequency (rf) dischargers) potrzebne są równania Maxwella. Równanie gazu idealnego Clapeyrona dla plazmy, która jest aktywnym, zjonizowanym gazem, jest uzupełnione równaniami określającymi skład plazmy. W obszarach LRT, czyli w obszarze kolumny łuku elektrycznego i powłok elektrodowych, produkt jonizacji termicznej jest znany dzięki równaniu Sahy. Równanie to można wydedukować z minimalizacji energii swobodnej Gibbs'a. W warstwach przyściennych, które są obszarami nierównowagi, i gdzie występują procesy ponownego łączenia (re-kombinacji), stosuje się równania ewolucji dla reakcji elektro-chemicznych. W literaturze znanych jest kilka modeli warstw przyściennych opisanych w [14], [19], [31], [32], [33]. Niestety, żaden z nich nie jest tak ogólny, aby nadawał się do opisu wszystkich przypadków generacji plazmy termicznej.

## 1.2. Zjawiska występujące w obszarze jeziora spawalniczego

Informacje o strumieniu ciepła przepływającego od łuku do jeziora spawalniczego są niezbędne do określenia penetracji cieplnej łuku elektrycznego tj. głębokości jeziora i zakresu strefy wpływu ciepła w spawaniu łukowym [7] i [26]. Penetracja jest sprzężona z charakterystykami ciekłego metalu w jeziorze spawal-

niczym. Wiadomo, że penetracja i kształt spoiny mają bezpośredni wpływ na jakość złącza. Istnieją cztery siły powodujące ruch cząstki w ciekłym metalu: siła oporu strumienia katodowego działająca na powierzchni ciekłego metalu, siła wyporu hydrostatycznego, siła elektromagnetyczna pojawiająca się w polu elektromagnetycznym wywołanym przepływem prądu spawania, oraz napięcie powierzchniowe jeziora. Te siły napędowe są zależne zarówno od właściwości fizycznych ciekłego metalu, jak również od charakterystyk plazmy. W związku z tym, kompleksowy model spawania TIG lub PAW jest potrzebny co symulacji łuku oraz jego oddziaływania z jeziorkiem. Taki kompleksowy i sprzężony problem został rozwiązany w [7], gdzie zastosowano uproszczone rozwiązania [6] i [11] otrzymane dla uproszczonego oddziaływania plazmy z jeziorkiem. Wzorem dla jednolitego stacjonarnego modelu spawania metod TIG lub PAW może być propozycja przedstawiona w [24]. Model [24] można wzbogacić poprzez uwzględnienie efektu topienia elektrody i efektów konwekcyjnych w jeziorku spawalniczym. Wynikami symulacji z użyciem takiego modelu są: dwuwymiarowe rozkłady temperatury i prędkości w obszarze jeziora, jego zarys, wymiary obszarów przylegających do elektrod, oraz określenie parametrów bilansu energii dla różnych obszarów plazmy i elektrod. W dalszej perspektywie rozwoju modelu można uwzględnić parowanie metalu na powierzchni jeziora i depresje.

### 1.3. Procesy termo-mechano-metalurgiczne w strefie wpływu ciepła

Najważniejszymi zjawiskami obserwowanymi w strefie wpływu ciepła (SWC) są: nagrzewanie i chłodzenie, rozszerzalność termiczna, odkształcenia sprężyste i niesprężyste, krzepnięcie jeziora spawalniczego, przemiany fazowe w ciele stałym i uplastycznienie podobszarów w następstwie odkształceń objętościowych spowodowanych przemianami fazowymi (transformation-induced plasticity). Stan materiału w procesie termo-mechano-metalurgicznym (TMM) jest określony przez cztery zmienne konstytutywne:

szybkość odkształcenia tensor lub dewiator		naprężenie tensor lub dewiator		temperatura	udziały fazowe
$\dot{\mathbf{L}}$	$\dot{\mathbf{E}}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{S}$	$\theta$	$\mathbf{y} = \{y^{(i)}\}, i = 1, \dots, 5$

Zmienne konstytutywne określa się w „rozproszonej cząsteczce” (ang. dispersed particle), która ma wewnętrzną wielofazową strukturę nazywaną „mikroregionem” (MR) (ang. micro-region). Przez MR rozumie się obszar materiału podobny do cząstki w klasycznej mechanice ciała stałego. MR może zawierać kilka ziaren. SWC lub złącze spawane składa się z

kilku MR i jest nazywane „mezod dziedziną” (ang. mesodomain). Zmienne stanu są sprzężone poprzez system równań równowagi sił wirtualnych i energii wewnętrznej oraz równań ewolucji dla udziałów fazowych. Reakcja materiału spawanego w procesie TMM jest określona przez równania ewolucji dla udziałów fazowych, parametry wzmocnienia, równania konstytutywne dla termo-sprężystości, równania klasycznej plastyczności, oraz równania dla płynięcia materiału indukowanego zmianami objętościowymi, (PIZO), spowodowanymi przemianami fazowymi. Równania te ukazują wpływ naprężeń, odkształceń, prędkości odkształcenia i temperatury na kinetykę przemian fazowych, i odwrotnie wpływ składu wielofazowego materiału na reakcje materiału poddanego złożonemu obciążeniu termo-mechanicznemu. Prawa ewolucji mikro-strukturalnej wyprowadzono z podstawowego założenia proporcjonalności przyrostu nowej fazy do ubytku „siły napędowej” transformacji [23]. Sprzężony i matematycznie spójny problem termo-mechano-metalurgiczny (STMM) (ang. consistent thermo-mechano-metallurgical) sformułowano jako problem wariacyjny i rozwiązano metodą elementów skończonych typu Galerkiina według [23]. Rzeczywista geometria mikrostrukturalna odwzorowuje się na siatkę elementów skończonych i wykorzystuje pojęcie hybrydowych elementów skończonych, co jest zgodne z ideą rozproszonych cząstek. W elementach hybrydowych skład fazowy spawanego materiału jest określony w punktach Gaussa, gdzie równania elementów skończonych są całkowane.

## 2. PODOBSZARY W PLAŻMIE TERMICZNEJ

Plazma spawalnicza jest generowana na skutek przepływu prądu elektrycznego przez gaz. Gaz nie przewodzi ładunków, chyba że odpowiednia ilość nośników ładunku zostanie wygenerowana i wyładowanie elektryczne ustanowi niejednoznaczny drogę przewodzenia między elektrodami. Plazma spawalnicza istnieje w obszarze łuku o dużej intensywności, gdzie rozkład potencjału zmniejsza się na powierzchni elektrod i wykazuje relatywnie mały gradient potencjału w kolumnie łuku. To spostrzeżenie pozwala podzielić łuk na następujące części: stałe lub ciekłe elektrody i ich powierzchnie, kolumnę plazmy termicznej, gdzie występuje jedna z form równowagi termicznej – lokalnej lub częściowo-lokalnej, oraz warstwy przyścienne, gdzie żadna z form równowagi nie jest możliwa. Anodowe i katodowe warstwy przyścienne mogą być podzielone na następujące podobszary: powłokę z ładunkiem przestrzennym, katodową pod-warstwę (ang. pre-sheath) jonizacyjną, anodową warstwę dyfuzyjną, jaka powstaje w wyniku parowania metalu z

jeziorka spawalniczego. Obszary plazmy termicznej w spawaniu TIG (i PAW), pokazane w [29] i [30], są wyszczególnione w Tablicy 2.

Procesy występujące w podobszarach plazmy TIG, jeziorka spawalniczego i strefy wpływu ciepła mają naturę termomechaniczną lub elektryczną i można podzielić je na dwie grupy wymienione w Tablicy 3.

### 3. TEORIA PLAZMY TERMICZNEJ

#### 3.1. Pojęcia ogólne

Listę procesów zachodzących w plazmie podano w Tablicy 4, dzieląc je na grupy w zależności od rodzaju cząsteczek głównych.

Plazma [2, 25] zawiera bardzo dużo cząsteczek wzajemnie oddziałujących i tylko statystyczne podejście jest właściwe dla redukcji ilości informacji potrzebnej do fenomenologicznego, makroskopowego opisu plazmy termicznej. Funkcja dystrybucji dla określonego rodzaju cząstek jest określona jako gęstość cząstek przypadających na jednostkę przestrzeni fazowej  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = dn(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)/d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ ; gdzie  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \in C$ ,  $f$  jest skończona dla każdego  $t$ , i  $f \rightarrow 0$  kiedy  $\mathbf{v} \rightarrow \infty$ . W modelu plazmy termicznej wszystkie makroskopowe zmienne można wydedukować z funkcji dystrybucji, ponieważ momenty tej funkcji statystycznej są związane z liczbą gęstości  $n(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , średnią prędkością, pędem przepływu, i energią przepływu.

Równanie Boltzmanna [3, 4] wyraża zależność funkcji dystrybucji od zmiennych niezależnych  $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}, t\}$ . Równanie Boltzmanna dla cząstek typu  $i$  ma następującą postać:

Tablica 2. Obszary plazmy termicznej w spawaniu TIG (i PAW).

Obszary w TIG (i PAW)	Pod-obszary	Pod-warstwy
katoda wolframowa	pręt wolframowy (nie topliwa)	
	stożek wolframowy (rozpad)	
łuk w GTWA (gas tungsten welding arc)	warstwy katodowe	powłoka ładunku przestrzennego pod-warstwa katodowa (strefa jonizacji)
	kolumna łuku	
	warstwy anodowe	pod-warstwa anodowa (warstwa dyfuzyjna) powłoka ładunku przestrzennego
anoda (przedmiot obrabiany)	jeziorko spawalnicze strefa ciekła obszar wpływu ciepła materiał rodzimy	

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j + \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_j f_j) + \nabla_{\mathbf{v}} \left( \frac{\mathbf{F}_j}{m_j} f_j \right) = \sum_j C_{jk} \quad (1)$$

gdzie

$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}_j f_j)$  – czyste (ang. net) płynięcie,

$\nabla_{\mathbf{v}}(f_j)$  – siły zewnętrzne,

$C_{jk}$  – absolutny przyrost cząstek w objętości kontrolnej jaka powstaje w wyniku kolizji między cząsteczkami rodzaju  $j$  z cząsteczkami rodzaju  $k$ ,

$F_j$  – siły elektryczne lub magnetyczne działające prostopadle do  $\mathbf{v}$ ,

$\mathbf{v}_j$  – prędkość cząstek rodzaju  $j$ ,

$m_j$  – masa cząstek rodzaju  $j$ ,

$\nabla_{\mathbf{v}}, \nabla_{\mathbf{x}}$  – operator dywergencji we współrzędnych kartezjańskich  $\mathbf{x}$  lub  $\mathbf{v}$ .

Przyjmując  $f$  jako funkcję energii  $\mathcal{E}$ , rozwiązanie równania (1) nazywa się Boltzmannowską dystrybucją energii i opisuje jako dystrybucję energii  $f(\mathcal{E})$  wśród klasycznych tzn. rozróżnialnych cząsteczek:

$$f(\mathcal{E}) = A e^{-\mathcal{E}/k_B T} \quad (2)$$

gdzie  $A$  jest stałą normalizującą. Wzór ten można zastosować do wyznaczenia wartości średniej energii  $\langle \mathcal{E} \rangle = k_B T$  przypadającej na cząsteczkę, o ile gęstość stanów nie zależy od energii.

Tablica 4. Procesy zachodzące w plazmie.

cząsteczki	proces	cząsteczki	proces	cząsteczki	proces
elektrony	jonizacja	jony	wymiana ładunku	fotony	wzbudzenie fotonowe
	wzbudzenie		rozpraszanie sprężyste		dysocjacja fotochemiczna
	„penning ionization”		jonizacja		foto jonizacja
	rozpraszanie sprężyste	excitation	atomy	rozpraszanie sprężyste	
	dysocjacja	rekombinacja		jonizacja	
	jonizacja dysocjacyjna	dysocjacja		dysocjacja	
przyłączenie dysocjacyjne	reakcja chemiczna		foto emisja		

Tablica 3. Natura procesów występujących w podobozarach plazmy TIG, jeziora spawalniczego i w strefie wpływu ciepła.

Pod-obszary fizyczne	Termodynamika i dynamika płynów	Elektryczność i elektronika gazowa
wolframowy pręt	<ul style="list-style-type: none"> <li>• przewodnictwo i ogrzewanie oporowe,</li> <li>• promieniowanie i konwekcja</li> </ul>	
powierzchnia katodowa (ciało stałe), stożek wolframowy	<ul style="list-style-type: none"> <li>• przewodnictwo i nagrzewanie oporowe</li> <li>• promieniowanie ciała (doskonale) czarnego</li> <li>• konwekcja</li> <li>• strumień energii płynący w kierunku powierzchni katody zrównoważony przewodnictwem ciepła do ciała stałego</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• chłodzenie na skutek termoemisji elektronów z powierzchni,</li> <li>• nagrzewanie na skutek emisji jonów z plazmy uderzających o katodę,</li> <li>• ponowne łączenie jonów</li> </ul>
powłoka katodowa (obszar niestabilności ładunku, promień ekranowania Debye, bezkolizyjny)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• konwekcja</li> <li>• promieniowanie</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• obszar ładunku przestrzennego ekranujący (blokujący) potencjał ścianki,</li> <li>• elektryczna warstwa powierzchniowa,</li> <li>• spadek potencjału powłoki,</li> <li>• przyspieszenie jonów w kierunku katody,</li> <li>• emisja elektronów na krawędzi powłoki,</li> <li>• elektrony odpychane przez potencjał powłoki</li> </ul>
warstwa katodowa (zdominowana przez kolizje cząstek)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• lokalna równowaga termodynamiczna (LRT) plazmy (w obszarze od strony plazmy)</li> <li>• stałe ciśnienie termiczne</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jonizacja na skutek kolizji cząstek obojętnych z elektronami,</li> <li>• przepływ energii między wiązką elektronów (emitowanych przez katodę) i ciężkimi cząsteczkami (jonami),</li> <li>• spadek potencjału,</li> <li>• rekombinacja trzech ciał,</li> <li>• dyfuzja własna elektronów,</li> <li>• termiczna przewodność elektronów</li> </ul>
kolumna łuku	<ul style="list-style-type: none"> <li>• laminowany przepływ płynu,</li> <li>• przepływ turbulentny na obrzeżach łuku,</li> <li>• LRT,</li> <li>• prawa zachowania plazmy wyprowadzone w ramach teorii magneto-hydro-dynamicznej (MHD),</li> <li>• konwekcja (straty),</li> <li>• radiacja (straty),</li> <li>• przepływ dwóch oddzielnych płynów (elektronów i jonów),</li> <li>• transport par metalicznych (z anody),</li> <li>• termo-dyfuzja oparów metalicznych do gazu ochronnego,</li> <li>• strumień ciepła powstający na skutek przewodnictwa, transportu entalpii (przez prąd unoszący elektrony) i termodyfuzja,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• brak ładunku przestrzennego,</li> <li>• prąd wzbudzony przez pole elektryczne i prąd Halla,</li> <li>• transport energii jonizującej,</li> <li>• termiczne rozszczepienie ciężkich jonów,</li> </ul>
warstwa anodowa	<ul style="list-style-type: none"> <li>• LRT może przeważać w tym obszarze,</li> <li>• transport oparów metalicznych (z anody),</li> <li>• konwekcja,</li> <li>• radiacja,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• dyfuzja nośników ładunków,</li> <li>• spadek potencjału,</li> <li>• kolizja jonów i elektronów,</li> </ul>
powłoka anodowa (obszar nierównowagi ładunków, promień ekranowania Debye)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• konwekcja,</li> <li>• radiacja,</li> <li>• parowanie metalu z powierzchni jeziora spawalniczego</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• strefa ładunku przestrzennego ekranująca (osłaniająca) potencjał (ściany) elektrody,</li> <li>• elektryczna warstwa przyścienna,</li> <li>• silne pole elektryczne występujące na skutek dewiacji od stanu quasi-neutralności,</li> <li>• niemal zerowe przewodnictwo elektryczne na froncie anody,</li> </ul>
jezioro spawalnicze	<ul style="list-style-type: none"> <li>• przepływ konwekcyjny Marangoni'ego</li> <li>• siła Marangoni'ego wywołana przestrzennym gradientem napięcia powierzchniowego,</li> <li>• przewodnictwo ciepła,</li> <li>• napięcie powierzchniowe,</li> <li>• wypór hydrostatyczny spowodowany przez przestrzenną wariację gęstości ciekłego oraz wariację lokalnego składu zależnego od temperatury,</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• generacja pola magnetycznego wzbudzonego przez rozbieżną drogę prądu,</li> <li>• siła Lorentza,</li> <li>• lepki opór hydrodynamiczny,</li> </ul>
strefa płynna	<ul style="list-style-type: none"> <li>• krzepnięcie,</li> <li>• przemiany fazowe w ciele stałym,</li> <li>• przewodnictwo,</li> <li>• konwekcja,</li> <li>• promieniowanie,</li> </ul>	

Dynamikę plazmy [2, 4] można opisać w sposób przybliżony przyjmując, że ruch cząsteczek plazmy jest kontrolowany przez czynne pola zewnętrzne w dodatku do makroskopowo uśrednionych pól (gładkich w przestrzeni i czasie) i generowanych przez obecność oraz ruch wszystkich cząstek plazmy.

Zmienne makroskopowe, ze względu na trudności w rozwiązaniu równania Boltzmanna zależnego od czasu, wyznacza się metodami przybliżonymi. Bezpośrednio z tego równania i bez jego rozwiązywania, można wyprowadzić równania różniczkowe rządzące czasowymi i przestrzennymi zmiennymi makroskopowymi. Te równania różniczkowe nazywa się makroskopowymi równaniami transportu i można je otrzymać biorąc momenty równania Boltzmanowskiego, tj. równania (1). Trzy pierwsze momenty są następujące:

równania równowagi	typ równania	zależności otrzymane przez pomnożenie lewej i prawej strony równania (1) przez
zachowanie masy	równanie ciągłości	$m$
zachowanie pędu	równanie ruchu	$m\mathbf{v}$
zachowanie energii	równanie energii	$\frac{m\mathbf{v}^2}{2}$

Niestety, układ równań transportu wygenerowanych tą metodą nie jest kompletny na żadnym poziomie hierarchii momentów. Próba otrzymania kompletnego układu równań transportu dla wyższego momentu równania Boltzmanna pociąga za sobą wprowadzenie nowej zmiennej makroskopowej:

równanie	nowa (dodana) zmienna makroskopowa
równanie ruchu	diada ciśnienia dynamicznego
równanie energii	wektor strumienia ciepła

Tablica 5. Klasyfikacja podstawowych teorii plazmy.

stopień trudności	teoria plazmy	równania dla każdego rodzaju cząsteczek	zmienne makroskopowe	aproksymacje
niski	plazma zimna (cold plasma)	zachowanie masy zachowanie pędu	gęstość cząstek średnia prędkość	diada ciśnienia dynamicznego $i, j = 1 \dots K, p_{ij} = 0$ temperatura = 0
średni	plazma ciepła (warm plasma)	zachowanie masy zachowanie pędu równowaga energii adiabatycznej	gęstość cząstek średnia prędkość ciśnienie skalare	zerowy wektor strumienia ciepła niediagonalne człony diady ciśnienia $i \neq j, p_{ij} = 0$ diagonalne człony diady ciśnienia
wysoki	plazma gorąca (hot plasma)	zachowanie masy zachowanie pędu równowaga energii	gęstość cząstek średnia prędkość ciśnienie skalare temperatura	$i \neq j, p_{ij} = 0$ $i = j, p_{ij} = p$

W związku z tym niezbędne jest wprowadzenie założenia o uproszczeniu najwyższego momentu funkcji dystrybucji, jaki może pojawić się w teorii plazmy. Takie założenie ogranicza system równań do pewnego etapu hierarchii momentów i pozwala stworzyć zamknięty układ równań transportu. Podstawowe teorie plazmy można sklasyfikować zależnie od poziomu komplikacji podstawowych równań (Tablica 5).

Teorię magneto-hydro-dynamiczną (MHD) można skonstruować stosując uproszczone formy równań transportu Boltzmanna i równania elektrodynamiki Maxwella: prawo Farady'ego, prawo Ampera, równanie Poissona, i równanie ciągłości pola magnetycznego. Dalszych aproksymacji można dokonać na poziomie zimnej lub ciepłej plazmy, jak to pokazano w Tablicy 6.

Tablica 6. Możliwe aproksymacje równań plazmy.

Typ plazmy lub cząstki	Aproksymacje i założenia
plazma izotropowa	nie ma zewnętrznego pola magnetycznego
plazma anizotropowa	istnieje zewnętrzne pole magnetyczne
plazma kolizyjna	występuje tłumienie fal
struktura plazmy	1. rozpatruje się tylko gaz elektronowy, 2. rozpatruje się mieszaninę elektronów i jonów (jednego lub kilku typów), 3. całą plazmę uważa się za płyn przewodzący.

### 3.2. Transformacja charakterystyk plazmy dla trzech poziomów opisu

Analiza równań kinematycznych zdefiniowanych dla plazmy na poziomie molekularnym bazuje na koncepcji gęstości prawdopodobieństwa określonego w sześciowymiarowej przestrzeni fazowej (6-WPF). Przestrzeń ta jest kombinacją trójwymiarowej rzeczywistej przestrzeni geometrycznej i trójwymiarowej przestrzeni prędkości. Koncepcja ta jest powszechnie stosowana w fizyce nuklearnej, ale niestety jest niezbyt praktyczna dla symulacji komputerowej spawania i plazmowej obróbki powierzchniowej, gdzie precyzja obliczeń strumieni energii może być mniejsza. Z tego względu bardziej atrakcyjne są makroskopowe teorie plazmy [5]. Schemat przedstawiony w Tablicy 7 ilustruje transformację informacji z poziomu molekularnego do poziomu makroskopowego.

Analiza równań kinematycznych zdefiniowanych dla plazmy na poziomie molekularnym bazuje na koncepcji gęstości prawdopodobieństwa określonego w sześciowymiarowej przestrzeni fazowej (6-WPF). Przestrzeń ta jest kombinacją trójwymiarowej rzeczywistej przestrzeni geometrycznej i trójwymiarowej przestrzeni prędkości. Koncepcja ta jest powszechnie stosowana w fizyce nuklearnej, ale niestety jest niezbyt praktyczna dla symulacji komputerowej spawania i plazmowej obróbki powierzchniowej, gdzie precyzja obliczeń strumieni energii może być mniejsza. Z tego względu bardziej atrakcyjne są makroskopowe teorie plazmy [5]. Schemat przedstawiony w Tablicy 7 ilustruje transformację informacji z poziomu molekularnego do poziomu makroskopowego.

Tablica 7. Transformacja informacji z poziomu molekularnego do poziomu makroskopowego.

<b>stan molekularny</b>	
stan	stan cząsteczki określony przez liczby kwantowe,
liczby kwantowe	określone przez dozwolone wartości pędu cząstki, i.e. $p_j = \hat{n}_j \frac{h}{2L}$
$\hat{n}_j = \{n_{jx}, n_{jy}, n_{jz}\}$	gdzie $L$ – długość boku objętości kontrolnej; $h$ – stała Planck'a
poziomy energii	można je przedstawić jako zbiór półek (shelves) na różnych wysokościach, określonych dla różnych wartości $\hat{n}_j$ , wyprowadzonych z energii kinetycznej
	$E_{kj} = \frac{p_j^2}{2m} = \hat{n}_j^2 \frac{h^2}{8mL^2}$
przedział	można rozpatrywać jako skrzynkę zawierającą cząsteczki o różnych stanach, ale o tej samej energii,
stany energii	można przedstawić jako zbiór przedziałów na każdej półce,
degeneracja $g_j$ poziomu energetycznego $j$	liczba pokryć odpowiedniej półki,
<b>mikrostan</b>	specyfikacja całkowitej liczby cząstek w każdym <b>stanie energii</b>
<b>makrostan</b>	specyfikacja całkowitej liczby cząstek $N_j$ na każdym <b>poziomie energetycznym</b>

Schemat powyższy jest wspomagany przez Tablicę 8 zawierającą pojęcia właściwe dla różnych poziomów modelowania plazmy.

Funkcja rozdziału  $Q_j$ ,  $J \in (1, \dots, J)$  dla plazmy złożonej z  $J$  cząsteczek jest łącznikiem między sześciowym, 6-W, systemem mikroskopowym i makroskopowymi własnościami plazmy termicznej w trójwymiarowej, 3-W, przestrzeni. Właściwości termodynamiczne i transportowe plazmy zależą od składu plazmy.

Dla pojedynczo zjonizowanych atomów kompozycja (udziały fazowe) plazmy jest określona przez równanie Sahy-Eggert'a, prawo Daltona, i warunek quasineutralności plazmy. Formuły dla określania składu plazmy zostały przedstawione w Tablicy 9.

Równanie Sahy-Eggert'a może być użyte do określenia  $n^{(e)}$  w następującym algorytmie

- określić funkcje  $f(T)$  = Prawa str. równania Sahy-Eggert'a, tzn.

$$f(T) = \frac{2Q^{(i)}}{Q} \left( \frac{2\pi m^{(e)} k_B T}{h^2} \right) \exp \left( -\frac{E^{(i)}}{k_B T} \right)$$

- przyjąć wartość początkową  $n^{(e)} = ini n^{(e)}$ ,
- znaleźć  $E^{(i)}$ ,
- rozwiązać równanie,

$$(n^{(e)})^2 + 2f(T)n^{(e)} - \frac{Pf(T)}{k_B T} = 0,$$

- znaleźć nową wartość  $n^{(e)}$ ,
- iterować aż do spełnienia warunku  $(k+1)n^{(e)} - kn^{(e)} < \delta_{iter}$ . Właściwości termodynamiczne plazmy są określone

przez: gęstość masy, energię wewnętrzną, entalpię, ciepło właściwe i entropię. Tablica 10 przedstawia wyrażenia dla tych własności zarówno dla termodynamiki klasycznej (Gibbs'a) jak i mechaniki statystycznej (Boltzmann).

### 3.3. Magneto-hydro-dynamiczna teoria plazmy dla kolumny łuku elektrycznego

Stan plazmy w obszarze kolumny łuku elektrycznego jest bliski stanowi LRT. Stan taki nazywa się stanem częściowej lokalnej równowagi termodynamicznej (CLRT) i może być opisany w pewnym przybliżeniu przez jedną z teorii MHD. Teoria plazmy dla powłok elektrodowych jest niestety bardziej skomplikowana i bazuje na analizie przedstawionej w [2, 28, 29, 30]. Teoria plazmy w obszarach powłok nie jest ogólna i wykorzystuje osiągnięcia fizyki molekularnej, która stanowi bazę do definicji współczynników dotyczących transportu plazmy. Współczynniki te uwzględniają coulombowską teorię kolizyjności ruchu cząstek.

#### 3.3.1 Funkcje dystrybucji

Podstawą teorii MHD plazmy są definicje funkcji dystrybucji oraz gęstości liczbowej cząstek podane w Tablicy 11.

Pozostałe wielkości są zebrane w Tablicy 12.

Wielkości w Tablicy 12 są zdefiniowane dla cząstek  $s$  przy użyciu dwóch podstawowych pojęć  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  i  $n(\mathbf{x}, t)$  jako momenty określone zgodnie z ogólną definicją momentu  $Q(\mathbf{v})$  dla wielkości  $\mathbf{v}$ :

$$\langle Q(\mathbf{v}) \rangle = \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \quad (3)$$

Funkcja dystrybucji  $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  dla cząstek  $s$  spełnia równanie Boltzmann [4], które przedstawiono poniżej w dwóch formach dla obiektów wektorowych oraz dla ich składowych:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_s} + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_s} = \frac{\partial f_s}{\partial t} \Big|_{coll} \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x_j} + \frac{q_s}{m_s} (E_j + \varepsilon_{jkl} v_k B_l) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial v_j} + \mathbf{g}_j \cdot \frac{\partial f_s}{\partial v_j} = \frac{\partial f_s}{\partial t} \Big|_{coll} \quad (5)$$

gdzie

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_s \times \mathbf{B} + \frac{m_s}{q_s} \mathbf{g}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}_s} - \text{abso-}$$

lutna pochodna czasowa funkcji dystrybucji,

Tablica 8. Pojęcia właściwe dla różnych poziomów modelowania plazmy.

Pojecie	Definicja
Stan każdej cząstki	Położenie i pęd każdej cząstki systemu $N$ są reprezentowane przez punkt w sześćo-wymiarowej przestrzeni fazowej $\{\mathbf{X} \times \mathbf{p}\} \{x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3\}$ lub $\{\mathbf{X} \times \mathbf{v}\} \{x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3\}$ $\mathbf{x}$ – wektor położenia; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – pęd; $m$ – masa czystki
Przedział przestrzeni fazowej	Jest wyspecyfikowany przez sześć współrzędnych w komórce przez $g = \frac{(dV_l)_{min}}{h^3} \gg 1$ , gdzie $(dV_l)_{min}$ jest minimalnym wymiarem elementu w przestrzeni fazowej. Wewnątrz przedziału określa się tylko liczbę punktów w przestrzeni fazowej. Współrzędne indywidualnych punktów fazowych nie są wyspecyfikowane w indywidualnym przedziale.
Komorówka $\{\mathbf{X} \times \mathbf{p}\}$ w 6-W przestrzeni	Składa się z wielu przedziałów $g$ . Komórka jest małym elementem objętościowym $dV_l = dx_1 dx_2 dx_3 dp_1 dp_2 dp_3$ , $l = 1 \dots k$ ale dostatecznie dużym, aby zawierał dostatecznie dużą liczbę punktów fazowych, aby słuszne były prawa statystyczne
Mikro-stan systemu w statystyce Newtonowskiej	Jest zdefiniowany przez zupełną specyfikacji współrzędnych przedziałów w komórkach. Współrzędne punktów fazowych nie mogą być wyspecyfikowane. Wszystkie mikro-stany są równie możliwe.
Makro-stany systemu w mechanice Netonowskiej	Dany makro-stan odpowiada dużej liczbie różnych mikro-stanów. Rozkład punktów fazowych w przestrzeni fazowej $\sum N_k = N$ jest taki, że $N_1$ punkty fazowe należą do komórki numer 1, $N_j$ punkty fazowe należą do komórki numer $j$ , $N_k$ punkty fazowe należą do komórki numer $k$ . Tylko liczba punktów fazowych przypadających na komórkę jest określona. Indywidualne współrzędne punktów fazowych w komórce nie są określone.
Prawdopodobieństwo termodynamiczne $\mathcal{W}$	Liczba mikro-stanów $\mathcal{W} = \prod_k \frac{(g_k + N_k - 1)!}{(g_k - 1)! N_k!}$ jest stowarzyszona z każdym danym makro-stanem; gdzie $g_k$ reprezentuje liczbę przedziałów w komórce $k$ lub wielokrotność (degenerację) stanu energetycznego $E_k$ , lub wagę statystyczną pobudzonych atomów w stanie kwantowym $k$ . Max. termodynamiczne prawdopodobieństwo określa max. liczbę mikro-stanów dla konkretnego makro-stanu, który odpowiada stanowi max. entropii $S = k_B \log \mathcal{W}$ , jaka definiuje równowagę stanu.
Rozkład energii Maxwella-Boltzmann'a dla identycznych ale rozróżnialnych cząsteczek	Opisuje frakcyjną populację pobudzonych stanów w zależności od punktów fazowych $N_k \Rightarrow \frac{N_k}{N} = \frac{g_k}{Q} \exp(-E_k / k_B T)$ lub liczb gęstości $n \Rightarrow \frac{n_k}{n} = \frac{g_k}{Q} \exp(-E_k / k_B T)$ $n_k = \frac{N_k}{V}$ – liczba gęstości $V$ – objętość układu $Q = \sum_k g_k \exp(-\beta E_k)$ – funkcja rozdziału (suma stanów) $\beta = 1/k_B T [J^{-1}]$ – współczynnik Lagrange'a

Tablica 9. Formuły dla określenia składu plazmy.

Nazwa zależności	Równanie
1 Równowaga Sahy-Eggert'a dla jonizacji termicznej jest zależnością wyprowadzoną z minimalizacji energii swobodnej Gibbs'a	$\frac{n^{(e)} n^{(i)}}{n} = \frac{2Q^{(i)}}{Q} \left( \frac{2\pi m^{(e)} k_B T}{h^2} \right) \exp\left(-\frac{E^{(i)}}{k_B T}\right)$ $n^{(e)}$ – liczba gęstości elektronów, $[m^{-3}]$ , $n^{(i)}$ – liczbowa gęstość jonów, $[m^{-3}]$ $n$ – liczbowa gęstość cząstek neutralnych, $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ , $[Js]$ – stała Planck'a, $E^{(i)}$ – energia jonizacji, $Q, Q^{(i)}$ – suma stanów dla jonów i neutronów, $Q^{(i)} = \sum_s g_s^{(i)} \exp(-E_s^{(i)} / k_B T)$ $Q = \sum_s g_s \exp(-E_s / k_B T)$ $g_s^{(i)}, g_s$ – wagi statystyczne poziomów energii dla jonów i neutronów, $E_s^{(i)}, E_s$ – poziomy energii dla jonów i neutronów, $m^{(e)}$ – masa elektronów, $k_B$ – stała Boltzmann'a
2 prawo Dalton'a	$p = (n^{(e)} + n^{(i)} + n) k_B T$
3 quasi-neutralność plazmy	$n^{(e)} = n^{(i)}$

$\frac{\partial f_s}{\partial t} \Big|_{coll}$  – człon uwzględniający zmianę  $f_s$  na skutek molekularnych kolizji,  
 $q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  – siła Lorentza działająca na  $q_s$   
 $\mathbf{E}$  – pole elektryczne  $[volt/m]$ ,  
 $\mathbf{B}$  – indukcja magnetyczna  $[tesla]$ ,  
 $q_s$  – ładunek w cząsteczkach  $s$ ;  $[coulomb]$ ,  
 $m_s$  – masa cząsteczek  $s$ ;  $[kg]$ ,  
 $\mathbf{v}_s, v_j$  – prędkość cząstek  $s$  i składowe wektora prędkości,  
 $\mathbf{g}, g_j$  – siła masowa (np. grawitacyjna) przypadająca na jednostkę masy,  
 $\varepsilon_{jkl}$  – jednostkowy tensor permutacji,  
 $coll$  – wskaźnik dolny dla wielkości związanych z kolizyjnością cząstek.



Tablica 10. Własności termodynamiczne plazmy.

	Zmiana stanu lub miara	Termodynamika klasyczna zmiennie i parametry	Fizyka plazmy zmiennie i parametry
1	gęstość masy	$\rho$ – gęstość zmienna niezależna	$\rho = \sum n_i m_i$ $n_i$ – liczbową gęstość różnych cząsteczek plazmy, $m_i$ – masa cząstek
2a	energia wewnętrzna dla systemu określonego przez $T$ & $V$	$U = F + TS$ $U$ – energia potrzebna do stworzenia systemu $F$ – energia swobodna Helmholtza $T$ – temperatura absolutna $S$ – entropia końcowa $TS$ – energia importowana z otoczenia systemu przez ogrzewanie	energia swobodna Helmholtza [17] $F - F_0 = - \sum_j N_j k_B T_j (1 + \ln(Q_j / N_j)) - \frac{k_B T V}{12\pi\lambda_D^3}$ $F_0$ – energia odniesienia, $N_j$ – całkowita liczba cząsteczek typu $j$ $k_B$ – stała Boltzmanna, $1,3807 \cdot 10^{-23} [JK^{-1}]$ $T$ – temperatura kinetyczna $\frac{3}{2} k_B T_j = \frac{1}{2} m_j \bar{v}_j^2$ $\bar{v}_j^{2/2}$ – średnia kwadratowa lub efektywna prędkość cząsteczki $j$ $Q_j$ – funkcja pokrycia (partition function), $V$ – objętość plazmy [ $m^3$ ] $\lambda_D^3$ – promień ekranowania Debye [ $m$ ] $\frac{k_B T V}{12\pi\lambda_D^3}$ – korekcja Debye dla oddziaływania energii na skutek oddziaływania Coulomba dalekiego zasięgu
2b	energia wewnętrzna dla systemu określonego przez $T$ & $p$	$U = G + TS - PV$ $U$ – energia potrzebna do stworzenia systemu $G$ – energia swobodna Gibbsa $P$ – absolutne ciśnienie $V$ – końcowa objętość $PV$ – praca włożona dla nadania systemowi objętości $V$ przy stałym ciśnieniu $P$	energia swobodna Gibbsa [17] $G - G_0 = pV + F - F_0 = - \sum_j N_j k_B T \ln(Q_j / N_j) - \frac{k_B T V}{8\pi\lambda_D^3}$ $G_0$ – energia odniesienia $p = \frac{N_j k_B T}{V} - \frac{k_B T}{24\pi\lambda_D^3}$ – ciśnienie; $\frac{k_B T V}{8\pi\lambda_D^3}$ – korekcja Debye $\lambda_D = \frac{\epsilon_0 k_B T V}{e^2 \sum_{j=1}^2 Z_j^2 N_j}$ , $\epsilon_0$ – przenikalność elektryczna próżni, $e$ – elementarny ładunek $1,6022 \cdot 10^{-19} [C]$ , $Z_j$ – liczba ładunków jonowych $j$
3	ciepło właściwe	$c = \frac{q}{m\Delta T}$ $q$ – ciepło dodane $m$ – masa $\Delta T$ – zmiana temperatury	$c_p = \left. \frac{\partial H_g}{\partial T} \right _p$ ; $H_g = \frac{\sum_{j=1}^k x_j H_j}{\sum_{j=1}^k x_j M_j}$ – entalpia właściwa [ $kJ/kg$ ] $x_j = N_j / N_{tot}$ – udział molowy cząstek $j$ , $N_{tot}$ – liczba całkowita cząstek $H_j$ – entalpia jednego mola cząstek $j$ , $M_j$ – masa jednego mola cząstek $j$
4	entalpia	$H = U + PV$ energia potrzebna do utworzenia systemu plus praca potrzebna do zrobienia miejsca na ten system	1. kiedy $c_p$ jest określone w tablicach $H - H^0 = \int_0^T c_p(T) dT$ $H$ – całkowita entalpia mieszaniny w $T$ i $P$ $H^0$ – całkowita entalpia w stanie odniesienia $T = 0$ , $P = P_a$ $P_a$ – ciśnienie otoczenia, $c_p(T)$ – ciepło właściwe (capacity), [ $kJ/kgK$ ] 2. kiedy $c_p$ oblicza się z użyciem funkcji rozdziału (sumy stanów) Przykład dla azotu $N_2$ : skład 1 mola $N_2$ w stanie $(T, p)$ daje $N_2 \rightarrow \mathcal{N}_{N_2}^{mol} N_2 + \mathcal{N}_N^{mol} N + \mathcal{N}_{N^+}^{mol} N^+ + \mathcal{N}_{e^-}^{mol} e^-$ $\mathcal{N}_j^{mol} = N_j / N_A$ – ilość moli cząstek $j$ ; $N_A$ – liczba Avogadra Zachodzą tylko dwie reakcje: $N_2 \rightarrow 2N$ – dysocjacja; $N \rightarrow N^+ + e^-$ – jonizacja Całkowita entalpia w $(T, p)$ $H = \mathcal{N}_{N_2}^{mol} H_{N_2} + \mathcal{N}_N^{mol} H_N + \mathcal{N}_{N^+}^{mol} H_{N^+} + \mathcal{N}_{e^-}^{mol} H_{e^-}$ Zmiana entalpii do produkcji plazmy $\Delta H = H - H^0_{N_2}$ $H^0_{N_2}$ – entalpia w $(T_0, p_0)$ $\Delta H = \Delta H_{N_2} + \frac{1}{2}(\mathcal{N}_N^{mol} + \mathcal{N}_{N^+}^{mol}) H^0_N + \mathcal{N}_{N^+}^{mol} H^0_{N^+}$ $\Delta H_{N_2}$ – zamrożona entalpia bez reakcji kiedy $N_2$ ogrzewa się od $T_0$ do $T$ $H^0_{N^+}$ – entalpia reakcji na skutek jonizacji
5	entropia	$\Delta S = \frac{q}{T}$ miara energii, która nie może być zamieniona na pracę $\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{V, N}$ – alternatywna definicja temperatury	$S = k_B \log \Omega$ lub $S = \int_0^T \frac{c_p(T)}{T} dT$ kiedy $c_p$ jest dostępne z tablic



Tablica 11. Definicja funkcji dystrybucji.

Dystrybucja	Definicja
funkcja dystrybucji cząstek	całkowita liczba cząstek $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ w różniczkowym sześciowymiarowym elemencie przestrzennym $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$
gęstość liczbowa cząstek	liczba cząstek przypadających na jednostkę objętości $n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{v}$

Tablica 12. Definicja pozostałych wielkości w funkcji dystrybucji.

Wielkość	Definicja
prędkość płynu	$\mathbf{u}_s = \langle \mathbf{v}_s \rangle$
średnia prędkość termiczna	$V_s = \langle (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)^2 \rangle^{1/2}$
gęstość masy	$\rho = \sum_s m_s n_s$
wektor średniej prędkości masy	$\mathcal{U}_s = \frac{1}{\rho} \sum_s m_s n_s \mathbf{u}_s$
prędkość cząsteczki względem średniej prędkości masy	$\mathbf{w}_s = \mathbf{v}_s - \mathcal{U}_s; \langle \mathbf{w}_s \rangle = \mathbf{u}_s - \mathcal{U}_s$
tensor ciśnienia	$P_{s,jk} = m_s n_s \langle w_{s,j} w_{s,k} \rangle$

### 3.3.2. Podstawowy układ równań różniczkowo-całkowych w teorii MHD

Kiedy pola zewnętrzne  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są znane, równanie (4) można rozwiązać jako liniowe równanie różniczkowe. Jednakże w przypadku plazmy, pola  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są samouzgodnione i wówczas równanie Boltzmanna jest związane z równaniem Maxwella opisującym wpływ gęstości ładunku i gęstości prądu na pola magnetyczne i elektryczne. Prędkość cząsteczki, wpływającej do plazmy, zmienia się pod wpływem pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  na skutek oddziaływania sił, co powoduje indukcję prądu, a to z kolei jest przyczyną zaburzeń pól zewnętrznych. Równania Maxwella dla jednostek układu SI zapisać można w postaci:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{prawo Fradaya} \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{prawo Ampera} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ch} \quad \text{równanie Poissona} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

gdzie uwzględniono równania konstytutywne:

równanie	objaśnienie
$\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$	transformacja pola elektrycznego $\mathbf{E}$ , [V/m] do pola przemieszczeń $\mathbf{D}$ , [C/m <sup>2</sup> ]
$\mu \mathbf{H} = \mathbf{B}$	transformacja pola indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ , [T] do pola intensywności magnetycznej $\mathbf{H}$ , [H]

i użyto następujących symboli:

Symbol	Wielkość fizyczna	Wartość	Jednostki miary
$\mu_0, \mu$	przenikalność magnetyczna	$\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	$Hm^{-1}$ , H – henry; indukcyjność magnetyczna
$\epsilon_0, \epsilon$	przenikalność elektryczna	$\epsilon \approx \epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12}$	$Fm^{-1}$ , F – farad, reakcja pojemnościowa

Ponadto gęstość ładunku i gęstość prądu wyrażono przez:

$$\rho_{ch} = \sum_s q_s n_s \quad \text{gęstość ładunku} \quad (10)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_s q_s n_s \langle \mathbf{v}_s \rangle \quad \text{gęstość prądu} \quad (11)$$

Równania różniczkowo-całkowe (4) (lub (5)), (7), (8) i równania (6), (9) wraz z zależnościami (10) i (11) są podstawowymi równaniami zarówno dla kinetycznej teorii plazmy jak również dla teorii płynięcia, gdzie plazma jest rozpatrywana jako płyn przewodzący.

### 3.3.3. Teoria MHD płynu przewodzącego

Równania ruchu dla teorii płynięcia dwuskładnikowej plazmy zostały wyprowadzone, przyjmując że tylko przepływ elektronów i jonów jest zaangażowany w transport energii poprzez kolumnę łuku spawalniczego, która jest źródłem plazmy termicznej. Równania te są podstawą do sformułowania teorii MHD plazmy.

Biorąc momenty równania (5), dystrybucję prędkości cząstek można zastąpić przez wartości uśrednione w przestrzeni prędkości i użyć ich w opisie plazmy uważanej za płyn. Równania momentów otrzymuje się mnożąc równanie (5) przez dowolną funkcję prędkości  $Q(\mathbf{v})$  i całkując każdy człon równania według reguły (3). Momenty trzech członów znajdujących się na lewej stronie równania (5) są następujące:

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (n_s \langle Q \rangle), \quad (12)$$

$$\int v_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j} Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_j} (n_s \langle v_j Q \rangle), \quad (13)$$

$$\int \frac{q_s}{m_s} \left( E_j + \frac{\epsilon_{jkl} v_k B_l}{c} + \frac{m_s}{q_s} g_j \right) \frac{\partial f_s}{\partial v_j} Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = -\frac{q_s}{m_s} E_j n_s \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_j} \right\rangle - \frac{q_s}{m_s c} \epsilon_{jkl} B_l \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_j} v_k \right\rangle - g_j n_s \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_j} \right\rangle. \quad (14)$$

Równanie ogólne momentu dla równania (5), nazywanego także ogólnym równaniem zmiany, ma postać [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_s \langle Q \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_s \langle v_j Q \rangle) - \frac{q_s}{m_s} E_j n_s \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_j} \right\rangle - \frac{q_s}{m_s c} \epsilon_{jkl} B_l \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_j} v_k \right\rangle - g_j n_s \left\langle \frac{\partial Q}{\partial v_j} \right\rangle = \int \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll} Q d^3\mathbf{v} \quad (15)$$

Zerowy moment, wykorzystywany przy wyprowadzeniu dwóch równań bilansu, otrzy-

muje się, zakładając  $Q(\mathbf{v}) = \mathbf{1}$  w równaniu (15). Wyraża się go w postaci

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\partial(n_s u_j)}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

gdzie  $u_j$  jest składową prędkości płynu a prawa strona jest równa zero dla plazmy idealnej, kiedy pomija się jonizację, rekombinację trzech ciał i efekty wymiany

ładunku, co wyraża się następująco  $\left(\frac{\partial n^i}{\partial t}\right)_{coll} = 0$ ;

$\left(\frac{\partial n^e}{\partial t}\right)_{coll} = 0$ , gdzie indeks górny  $i$  jest właściwy dla jonów a  $e$  dla elektronów. Dwie zasady zachowania: zasadę zachowania masy i zasadę zachowania ładunku, otrzymuje się mnożąc równanie (16) przez masę  $m_s$  lub ładunek  $q_s$ , odpowiednio, i sumując względem  $s$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{U}) = 0 \text{ z gęstością masy } \rho = \sum_j n_j m_j \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (18)$$

Pierwszy moment równania Boltzmann'a z  $Q = \mathbf{v}$  otrzymuje się mnożąc (5) przez  $v_m$  i całkując w przestrzeni prędkości:

$$\frac{\partial(m_s n_s u_m)}{\partial t} + \frac{\partial(m_s n_s \langle v_j v_m \rangle)}{\partial x} - n_s q_s (E_m - \epsilon_{mjk} u_j B_k) - n_s g_m = \pm \mathcal{P}_m \quad (19)$$

Znak gęstości pędu po prawej stronie jest przeciwny dla elektronów i jonów i wyraża się następująco:

$$\mathcal{P}_m = m^{(i)} \int \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial t}\right)_{coll} v_m^{(i)} d^3 \mathbf{v}^{(i)} = m^{(e)} \int \left(\frac{\partial f^{(e)}}{\partial t}\right)_{coll} v_m^{(e)} d^3 \mathbf{v}^{(e)} \quad (20)$$

gdzie wielkości dla elektronów i jonów oznaczono wskaźnikiem górnym  $e$  lub  $i$ , odpowiednio. Równanie (20) można napisać zakładając, że gęstość całkowita momentu pędu dla systemu nie zmienia się na skutek kolizji elektronów i jonów.

Równanie ruchu płynu można wyprowadzić z (19) używając następujących zmiennych konstytutywnych dla płynu:

$u_j$  – prędkość płynu,

$\mathcal{U}_j$  – średnia prędkość masy,

$w_j$  – prędkość cząstki względem średniej prędkości masy,

$P_{jk}$  – tensor ciśnienia,

oraz zależności dla diady prędkości:

$$\langle v_j v_k \rangle = \langle (\mathcal{U}_j + w_j)(\mathcal{U}_k + w_k) \rangle = \frac{1}{nm} P_{jk} + \mathcal{U}_j u_k + \mathcal{U}_k u_j - \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k \quad (21)$$

Ostatecznie równanie ruchu płynu w postaciach odpowiednich dla jonów i elektronów można zapisać następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(i)} n^{(i)} u_m) + \frac{\partial}{\partial x_m} (P_{jm}^{(i)} + m^{(i)} n^{(i)} (\mathcal{U}_j u_m + \mathcal{U}_m u_j - \mathcal{U}_j \mathcal{U}_m)) - n^{(i)} q^{(i)} E_m - n^{(i)} q^{(i)} \epsilon_{mjk} u_j B_k - n^{(i)} g_m = \pm \mathcal{P}_m^{(i)} \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m^{(e)} n^{(e)} u_m) + \frac{\partial}{\partial x_m} (P_{jm}^{(e)} + m^{(e)} n^{(e)} (\mathcal{U}_j u_m + \mathcal{U}_m u_j - \mathcal{U}_j \mathcal{U}_m)) - n^{(e)} q^{(e)} E_m - n^{(e)} q^{(e)} \epsilon_{mjk} u_j B_k - n^{(e)} g_m = \pm \mathcal{P}_m^{(e)} \quad (23)$$

### 3.3.4. Równania Magneto-Hydro-Dynamiczne

Teoria magneto-hydro-dynamiczna plazmy jest uproszczeniem teorii płynięcia plazmy. Dwie spośród takich uproszczonych teorii są najbardziej popularne: teoria hydrodynamiczna dwóch płynów oraz teoria hydrodynamiczna jednego płynu. W obydwu teoriach przyjęto założenia podane w Tabelicy 13.

Tabelica 13. Założenia przyjęte w teoriach magneto-hydro-dynamicznych.

Dot. płynu i skali	Założenia
płyny: jonowy i elektronowy	łączą się, mają wspólną prędkość płynięcia $\mathcal{U}$
odpowiednie skale czasu	są długie w porównaniu z mikroskopowymi skalami czasu
skala przestrzenna	jest długa w porównaniu z promieniem ekranowania Debye $\lambda_D$ , jest długa w porównaniu z termicznym promieniem żyroskopowym dla jonu

Równanie ruchu dla płynu MHD wyprowadza się dodając zależności (22) do (23). Równanie MHD można wyrazić zarówno dla obiektów wektorowych jak również ich składowych:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{U}_m) + \frac{\partial}{\partial x_m} (P_{jm} + \rho \mathcal{U}_j \mathcal{U}_m) - \rho_{ch} E_m - \epsilon_{mjk} J_j B_k - \rho g_m = 0 \quad (24)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + (\mathcal{U} \cdot \nabla) \mathcal{U} \right] = -\nabla P + \rho_{ch} \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \quad (25)$$

gdzie ciśnienie jest skalarą  $P$ , rozkład prędkości jest stochastyczny i  $P = P_{jm}^{(e)} + P_{jm}^{(i)} = P_{jm}$ . Prędkość Eulero-wska płynu  $\mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  odnosi się do prędkości elementu płynu. Kontrastuje ona z prędkością Lagrange'a, która jest prędkością indywidualnej cząstki zawartej w elemencie płynu i określonej w każdej chwili. Prędkość Lagrange'a jest pochodną czasową wektora położenia cząstki i jest tylko funkcją czasu.

Zależność łącząca gęstość prądu  $\mathbf{J}$  z  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  i  $\mathcal{U}$ , tj. uogólnione prawo Ohm'a, otrzymuje się w postaci:

$$\mathbf{J} + \frac{\sigma m^{(i)} m^{(e)}}{\rho e^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\sigma m^{(i)}}{\rho e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \sigma (\mathbf{E} + \mathcal{U} \times \mathbf{B} + \frac{m^{(i)}}{\rho e} \nabla P) \quad (26)$$

postępując zgodnie z procedurą podaną w Tablicy 14.

Tablica 14. Procedura wyznaczania zależności stanowiącej uogólnione prawo Ohma.

pomnożyć (22) przez	$(-e/m^{(e)})$
pomnożyć (23) przez	$(e/m^{(i)})$
dodać dwa równania i pominąć czony z	$\mathcal{U}_j u_k, \mathcal{U}_k u_j, \mathcal{U}_j \mathcal{U}_k$
napisać równanie	$\frac{\partial J_m}{\partial t} = \frac{e}{m^{(e)}} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x_m} - \frac{e}{m^{(i)}} \frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_m} + e^2 \left( \frac{n^{(i)}}{m^{(i)}} + \frac{n^{(e)}}{m^{(e)}} \right) E_m$ $\frac{e^2}{c} \varepsilon_{mjk} \left( \frac{n^{(i)} u_j^{(i)}}{m^{(i)}} + \frac{n^{(e)} u_j^{(e)}}{m^{(e)}} \right) B_k + e \left( \frac{1}{m^{(i)}} + \frac{1}{m^{(e)}} \right) P_m$
dokonać oszacowania członów	$n^{(e)} \approx n^{(i)} \approx \frac{\rho}{m^{(i)}}, \quad u_m^{(i)} \approx \mathcal{U}_m$ $u_m^{(e)} \approx \mathcal{U}_m - \frac{m^{(i)} c}{\rho e} J_m$
przyjąć że	wymiana pędu między elektronami i jonami jest proporcjonalna do względnej prędkości
przyjąć przybliżenie	$P_m = \frac{e \rho J_m}{m^{(i)} \sigma}$

gdzie:

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}}, \quad S/m - \text{przewodnictwo elektryczne,}$$

$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12}$ ,  $F/m$  – przenikalność elektryczna,  
 $\omega_{pi} = 4,20\pi \times 10^2 Z \mu_{ip}^{-1/2} (n^{(i)})^{1/2}$ ,  $Hz$  – częstość jonów plazmy,

$\omega_{pe} = 18,96\pi \times 10^3 (n^{(e)})^{1/2}$ ,  $Hz$  – częstość elektronów plazmy,

$Z$  – stan ładunku dla jonu,

$$\mu_{ip} = \frac{m^{(i)}}{m^{(p)}} - \text{stosunek masy jonu do protonu,}$$

$m^{(p)} = 1,6726 \times 10^{-27}$ ,  $kg$  – masa protonu,

$m^{(e)} = 9,1094 \times 10^{-31}$ ,  $kg$  – masa elektronu

$m^{(i)}$  – masa jonu,

$e = 1,6022 \times 10^{-19}$ ,  $C$  – ładunek elementarny (ładunek elektronu),

$c = 2,9979 \times 10^8$ ,  $ms^{-1}$  – prędkość światła w próżni.

Prawo Ohm'a (26) można uprościć, przyjmując założenia podane w Tablicy 15, które można zapisać w formie:

Tablica 15. Założenia upraszczające prawo Ohma.

Założenie	Aproksymacja
$\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$	$\frac{\sigma m^{(i)} m^{(e)}}{\rho e^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0$
częstotliwość cyklotronowa $\Omega^{(e)} \ll \omega_{pe}$	$\frac{\sigma m^{(i)}}{\rho e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$
gradient ciśnienia jest pomijalnie mały $\nabla P \approx 0$	$\frac{m^{(i)}}{\rho e} \nabla P = 0$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathcal{U} \times \mathbf{B}). \quad (27)$$

Zakładając, że energia wewnętrzna elementu płynu nie zmienia się w czasie, kiedy propaguje się pod ciśnieniem  $P$  proporcjonalnym do  $\rho^{\mathcal{F}}$  ( $\mathcal{F}$  – wskaźnik adiabatyczny), tzn. przyjmując, że proces jest adiabatyczny i biorąc moment równania Boltzmanna (4) drugiego rzędu, prawo zachowania energii zapisuje się w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \|\mathcal{U}\|^2 + \frac{2P}{\mathcal{F}-1} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{\mu_0} + \epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 \right) + \nabla \cdot \left( \rho \|\mathcal{U}\|^2 \mathcal{U} + \frac{2\mathcal{F}}{\mathcal{F}-1} P \mathcal{U} + \frac{2}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = 0 \quad (28)$$

gdzie wskaźnik adiabatyczny dla gazów monoatomowych jest  $\mathcal{F} = \frac{5}{3}$  i  $\|\cdot\|$  jest normą kwadratową wektora.

Sformułowanie kompletnego układu równań w teorii MHD wymaga wprowadzenia dalszych założeń:

- pominięcie członu przemieszczenia  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx 0$  w prawie Ampera daje:
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (29)$$
- dywergencja równania (29) daje lewą stronę równą zero i  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
- przyjęcie  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  w równaniu (18) prowadzi do  $\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} \equiv \dot{\rho}_{ch} = 0$
- eliminacja  $\mathbf{E}$  z prawa Ohma (27) i prawa Faraday'a z (6) jest możliwa poprzez
  - zastosowanie operatora curl  $\nabla \times$  w równaniu (27), tzn.
  - $\nabla \times \mathbf{J} = \sigma (\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathcal{U} \times \mathbf{B}))$ ,

- zależność  $\nabla \times \mathbf{J}$  od  $\mathbf{B}$  otrzymuje się biorąc  $\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$
- gdzie pierwszy człon prawej strony  $\nabla(\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ , ponieważ  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  z (9)
- drugi człon prawej strony  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$ , ze względu na (29) i  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$
- wówczas  $\nabla \times \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$ ,
- ostatecznie równanie indukcji można wyrazić w zależności od  $\mathbf{B}$  lub  $\mathbf{H}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathcal{U} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathcal{U} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{H} \quad (31)$$

- założenie o neutralności ładunku  $\rho_{ch} = 0$  (z  $\frac{\partial \rho_{ch}}{\partial t} = 0$ ) powoduje, że równanie Poissona (8) nie występuje w końcowym układzie równań,
- równanie (9) można potraktować jako warunek początkowy, ponieważ
  - biorąc dywergencję równania (6)  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , można zauważyć że lewa strona równa się zeru,
  - prawa strona może być wyrażona w postaci  $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$  skąd wynika, że  $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$  w czasie procesu.

Końcowy układ równań MHD, jaki można znaleźć w [8], określa ewolucję układu w czasie i ma następującą postać:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathcal{U} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{równanie indukcji}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathcal{U}) = 0 \quad \text{prawo zachowania masy}$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + (\mathcal{U} \cdot \nabla) \mathcal{U} \right] = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \quad \text{równanie ruchu}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \|\mathcal{U}\|^2 + \frac{2P}{\mathcal{F}-1} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{\mu_0} + \epsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 \right) + \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \left( \rho \|\mathcal{U}\|^2 \mathcal{U} + \frac{2\mathcal{F}}{\mathcal{F}-1} P \mathcal{U} + \frac{2}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = 0$$

prawo zachowania energii,

gdzie występują dwie skalarne wielkości:  $P$  i  $\rho$ , dwa wektory:  $\mathbf{B}$  (lub  $\mathbf{H}$ ) i  $\mathcal{U}$ , jako nieznanne „ewolucyjne” wielkości. Pole elektryczne  $\mathbf{E}$  i gęstość prądu  $\mathbf{J}$  są

określone przez:

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{modyfikacja równania (29)} \quad (33)$$

$$\mathbf{E} = -\mathcal{U} \times \mathbf{B} \quad \text{modyfikacja równania (27) kiedy} \quad (34)$$

$$\text{magnetyczna liczba Reynoldsa } R_m = \frac{\|\mathcal{U}\| \|\mathbf{B}\|}{\sigma \|\mathbf{J}\|} \gg 1.$$

Pomocnicze zależności, które mają związek z aproksymacją plazmy jako płynu, w teorii MHD dla pojedynczego płynu wyrażają się następująco:

$$\text{gęstość masy } n^{(i)} = n^{(e)} = n \Rightarrow \rho = m^{(i)} n \quad (35)$$

$$\text{prędkość płynu } \mathcal{U} = \mathcal{U}^{(i)} \quad (36)$$

$$\text{temperatura } T = T^{(e)} + T^{(i)} \quad (37)$$

ciśnienie

$$P = P^{(e)} + P^{(i)} = k_B (n^{(e)} T^{(e)} + n^{(i)} T^{(i)}) = nk_B T. \quad (38)$$

W literaturze dotyczącej teorii MHD znanych jest kilka wariantów teorii z różnymi zbiorami zmiennych, podanych w Tablicy 16.

Tablica 16. Warianty teorii MHD.

Zmienne	Literatura
ewolucyjne zmienne dla plazmy – pojedynczego płynu $\rho, P, \mathcal{U}, \mathbf{J}, T$	[10]
ewolucyjne zmienne dla plazmy – dwóch płynów $n, \mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{U}^{(e)}, P^{(i)}, P^{(e)}, \mathbf{J}, T^{(i)}, T^{(e)}$	[10]
wszystkie zmienne dla pojedynczego płynu $\rho, P, \mathcal{U}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{J}$	[21]
ewolucyjne zmienne dla plazmy – pojedynczego płynu $\rho, P, \mathcal{U}, \mathbf{B}$	[8]

## 4. MODELE PLAZMY

### 4.1. Prosty model kolumny łuku

Prosty model łuku elektrycznego przedstawili w latach trzydziestych Elenbaas [9] i Heller [12]. Model ten bazuje na porównaniu członu gradientowego  $\text{div}(-\kappa^{(e)} \nabla T)$  z członem związanym z generacją pola elektrycznego  $\sigma E^2$ . Dyfuzja termiczna i efekty radiacyjne zostały pominięte w modelu. Podstawowe równanie dla osiowo-symetrycznej kolumny łuku zapisuje się w postaci:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \kappa^{(e)} \frac{dT}{dr} \right) + \sigma E_z^2 = 0 \quad (39)$$

Wprowadzając potencjał strumienia ciepła  $S = \int_0^T \kappa^{(e)} dT$ ; równanie (39) można wyrazić przez:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dS}{dr} \right) + \sigma E_z^2 = 0 \quad (40)$$

gdzie  $S(T)$  jest tylko funkcją temperatury. Całkując równanie (40) metodą charakterystyk [18] i wykorzy-

stując prawo Ohma  $I = 2\pi E_z \int_0^R \sigma r dr$ , rozwiązanie można przedstawić w postaci:

$$E = \frac{1,08}{R} \left( \frac{2fS_0}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp^{\frac{1}{2f}} \quad (41)$$

$$I = 7,27R(2fS_0\sigma_0)^{\frac{1}{2}} \exp^{-\frac{1}{2f}} \quad (42)$$

gdzie  $f = \frac{\int_0^{S_0} \sigma dS}{\sigma_0 S_0}$ . Z powyższego rozwiązania i [13]

można wydedukować; że:

$$EI = f_1(S) = f_2(T), \quad (43)$$

co pokazuje, że temperatura maksymalna  $T_{max} = f_2^{-1}(EI)$  jest funkcją mocy wejściowej na jednostkę długości  $L = IE$ . Oznacza to, że maksymalna temperatura plazmatronu jest ograniczona tylko przez moc wejściową. Warto w tym miejscu zauważyć, że w spawaniu gazowym maksymalna temperatura jest limitowana przez wewnętrzną entalpię spalane go gazu.

## 4.2. Ogólny model plazmy

Ogólny model plazmy zaproponował Wendelstorf i inni [24, 30]. Założenia przyjęte w tym modelu przedstawiono w Tablicy 17.

Tablica 17. Założenia przyjęte w modelu Wendelstorka.

Kolumna łuku	
1	przepływ płynu jest laminarny $Re < 400$
2	przepływ płynu na obrzeżach kolumny może być turbulenty (w sensie teorii MHD)
3	jest w lokalnej równowadze termodynamicznej (LRT)
4	jest quasi-neutralny, tzn. wolny od ładunków przestrzennych
5	płynięcie jest 2-W we współrzędnych cylindrycznych $(r, z)$
Obszar katodowy	
1	temperatura elektronów $T^{(e)}$ jest równa temperaturze ciężkich cząstek $T^{(i)}$
Warstwa przyścienna	
1	obszar ten jest quasi-neutralny
2	model płynięcia z dwoma płynami jest odpowiedni
3	straty radiacyjne energii można pominąć
4	ciśnienie ciepłe jest stałe i równe atmosferycznemu
Warstwa „naskórkowa”	
1	iony są mono-energetyczne
2	przepływ jest bezkolizyjny
3	emisyjność pola jest pomijalna
4	rekombinacja jonów następuje na powierzchni katody
5	rozkład prędkości elektronów na krawędzi warstwy jest maxwellowski
Obszar anody	
1	stan cząstek w tym obszarze różni się od stanu LRT
2	modelowanie warstwy anodowej jest podobne do modelowania warstwy katodowej
3	nadwyżka ciśnienia (brana z modelu kolumny łuku) jest stała w obszarze

Problem płynięcia cząstek plazmy i transmisji energii między podobszarami łuku jest opisany równaniami pokazanymi na rysunku 1 i rysunku 2.

Warunki brzegowe przedstawione w [29, 30] dotyczą przejścia z katody do LRT (lub częściowej LRT) i są podane w Tablicy 18.

Tablica 18. Warunki brzegowe przejścia z katody do LRT.

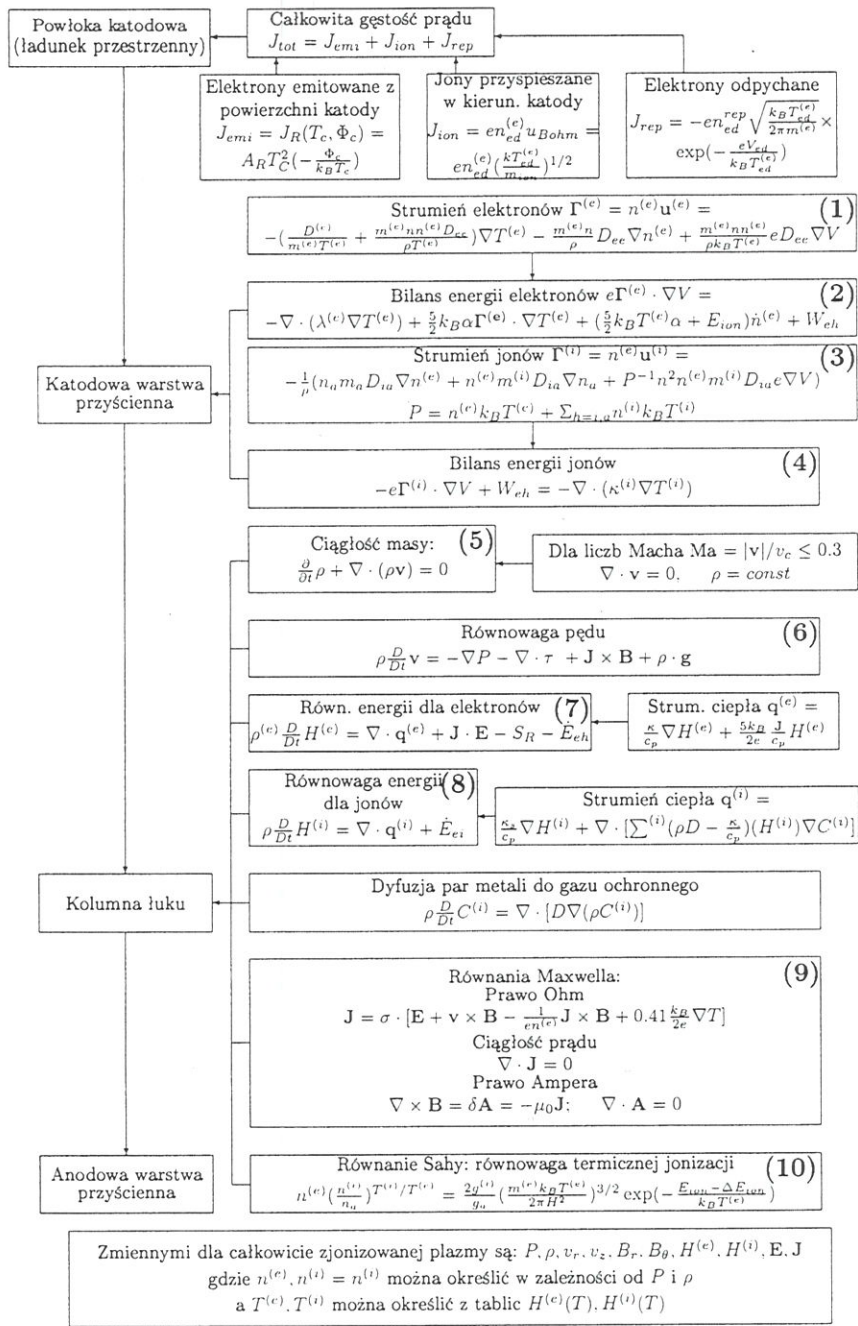
Obszar łuku	$T$	$P$
łuk elektryczny	$T_p = 21000 \text{ K}$	
daleko od powierzchni katody	$\frac{dT_p}{dx} = -2,7 \cdot 10^7 \text{ K/m}$	
warstwa przyścienna		$1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
powierzchnia katody	$T_c = 3000 \text{ K}$	

Dodatkowe warunki dla modelu są następujące

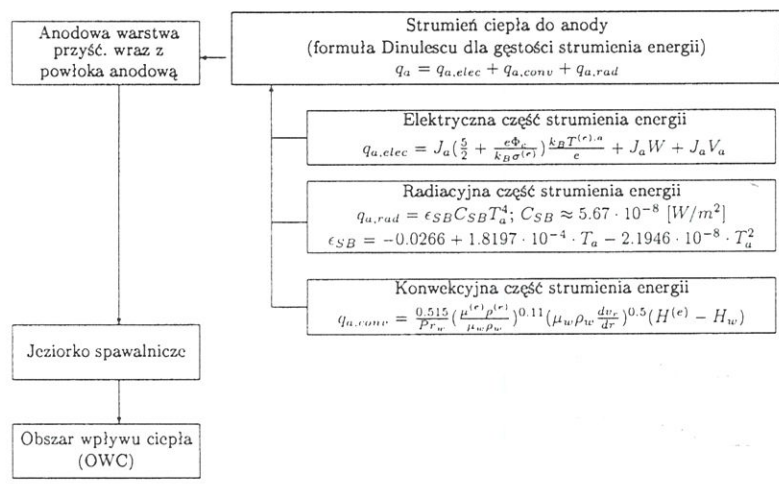
Łuk elektryczny	$d_{dot}$	$\Phi_c$	$J_{tot}$
warstwa przyścienna	$1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$		
powierzchnia katody		$2,63 \text{ eV}$	$1,2 \cdot 10^8 \text{ A/m}^2$

## 5. WNIOSKI

Teoria MHD jest uproszczoną teorią plazmy, która zapewnia wystarczającą precyzję w opisie źródeł ciepła występujących w spawaniu i powierzchniowej obróbce cieplnej z udziałem plazmy. Zaletami tej teorii są jej względna prostota i możliwość trójwymiarowej, makroskopowej analizy dynamicznej plazmy. Niestety, trzy ważne elementy współczesnej fizyki: teoria relatywistyczna, mechanika kwantowa i równania Maxwella dla propagacji fal, nie są w tej teorii wykorzystywane. Z tego powodu nie można uwzględnić następujących efektów: promieniowania, rf-nagrzewania, mikro-niestabilności ruchu cząstek, rezystancyjnej niestabilności. Bardziej złożone modele plazmy powinny być użyte w warstwach przylegających bezpośrednio do powierzchni elektrod. Mimo względnej prostoty, teoria plazmy MHD jest ciągle zbyt mało popularna wśród inżynierów spawalników, ponieważ wymaga znajomości mechaniki statystycznej Boltzmanna. Dodatkową trudność stanowi transformacja wyników numerycznych otrzymanych w ramach teorii MHD do programów numerycznej symulacji procesów termo-mechano-metalurgicznych (TMM) zachodzących w strefie wpływu ciepła. Wynika to głównie z różnych definicji stanu cząstki i braku spójnego sformułowania procesów MHD sprzężonych z procesami TMM. Istniejące programy komercyjne do symulacji plazmatronów nie budzą zaufania potencjalnych użytkowników ze względu na niejasno opisane modele matematyczne i brak możliwości zweryfikowania kodu. Przegląd modeli plazmy MHD i opis algorytmów wykorzystywanych do okre-



Rysunek 1. Część pierwsza schematu dla modelu plazmy spawalniczej zaproponowanego przez Wendelstorfa i innych w [29, 30].



Rysunek 2. Druga część schematu dla modelu plazmy spawalniczej zaproponowanego przez Wendelstorfa i innych w [29, 30].

ślenia plazmowego strumienia ciepła, ciśnienia na powierzchni ciekłego metalu i dynamiki ciekłego metalu będą przedstawione w następujących publikacjach.

## 6. OZNACZENIA I SYMBOLE

Symbole użyte na rysunkach (1) i (2) są zgodne z dokumentem IUPAP-25 oraz NRL Plasma Formulary [15]. Ich objaśnienia znajdują się w Tablicy 19.

Tablica 19. Symbole na rysunkach 1 i 2.

Symbol	Opis
$c_p$	ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu
$C^{(i)}$	koncentracja cząstek $i = e, h, a$
$D$	współczynnik dyfuzji lub dyfuzja termiczna ( $m^2/s$ )
$D_{ia}$	współczynnik dyfuzji jonów wśród neutralnych atomów
$D^{(e)}, D_{ee}$	współczynnik dyfuzji cieplnej dla elektronów, współ. dyfuzji własnej elektronów
$e$	ładunek elementarny lub indeks dla elektronów
$\dot{E}_{ei}$	wymiana ciepła między strumieniami elektronów i jonów
$E_{ion}$	energia jonizacji
$E, \mathbf{E}$	pole elektryczne
$E_r = \frac{\partial V}{\partial r}, E_\theta, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$	składowe pola elektrycznego
$\mathcal{E}$	całkowita energia
$g$	przyspieszenie ziemskie
$h$	współczynnik przewodnictwa ciepła
$H, H^{(i)}, H^{(e)}, H_w$	entalpia całkowita, jonów, elektronów, i ściany
$J_{emi}, J_{rep}$	gęstość prądu emitowanych i odpychanych elektronów
$J_{tot}$	całkowita gęstość prądu
$J_R, J_{ion}$	gęstość Richardsona, gęstość jonów przyspieszanych w kierunku katody
$f^{(i)}, f^{(e)}$	gęstość prądu jonów i elektronów
$J_c, J_a$	gęstość prądu płynącego do katody i do anody
$\mathbf{j}$	gęstość prądu
$k_B$	stała Boltzmanna
$m_a, m^{(e)}, m_{ion}$	masa cząstek
$n, n^{(e)}, n^{(i)}$	liczby gęstości: całkowita, elektronowa i jonowa
$\dot{n}_{prod}^{(e)}$	powstawanie elektronów w wyniku reakcji chemicznej, jonizacji i przegrupowania
$n_{ed}^{(e)}$	gęstość elektronów i jonów na brzegu powłoki elektrodowej,
$n_{ed}^{rep}$	gęstość jonów odpychanych na brzegu powłoki elektrodowej
$P$	ciśnienie
$q_{a,elec}, q_{a,rads}, q_{a,conv}$	udziały gęstości strumienia energii: elektrycznej, radiacyjnej i konwekcyjnej
$S_R$	źródło promieniowania a także radiacyjne straty energii
$T$	temperatura;
$T_a$	temperatura otoczenia
$T_c$	temperatura katody
$T^{(e)}$	temperatura gazu elektronowego,
$T^{(e),a}$	temperatura gazu elektronowego na anodzie,
$T_{ed}^{(e)}$	temperatura gazu elektronowego na brzegu powłoki elektronowej,
$u_{Bohm}$	prędkość Bohm'a
$v_r, v_z$	składowe prędkości we współrzędnych cylindrycznych
$v_c$	lokalna prędkość dźwięku
$V$	potencjał elektryczny
$V_a$	spadek anodowy napięcia
$V_c$	spadek katodowy napięcia
$W$	funkcja pracy materiału anody
$W_{ei}$	wymiana energii przypadająca na jednostki objętości na skutek sprężystych kolizji elektronów z ciężkimi cząstkami
$\mathbf{A}$	wektor potencjału dla pola magnetycznego
$\mathbf{B}$	pole magnetyczne
$\mathbf{J}$	wektor gęstości strumienia prądu $\{J_r, J_z, J_\theta\}$
$\mathbf{q}^{(e)}, \mathbf{q}^{(i)}$	wektor strumienia ciepła dla elektronów i jonów
$\mathbf{v}$	wektor prędkości $\{v_r, v_z, v_\theta\}$
$\alpha$	$\alpha = 1 + 2\rho D^{(e)}/5n^{(e)}nm^{(e)}m_a D_{ee}$
$\Gamma^{(e)}, \Gamma^{(i)}$	strumienie elektronów i jonów
$\epsilon$	emisyjność powierzchni
$\kappa$	całkowita przewodność termiczna
$\kappa^{(e)}, \kappa^{(i)}$	termiczne przewodnictwo gazu elektronowego i jonowego
$\lambda_v$	ciepło ukryte
$\mu_0$	przepuszczalność powierzchni swobodnej = $4\pi \cdot 10^{-7} [Hm^{-1}]$
$\rho, \rho^{(e)}$	gęstość gazu elektronowego
$\sigma, \sigma^{(e)}$	współczynnik przewodnictwa elektrycznego całkowity i dla gazu elektrycznego
$\tau$	tensor naprężenia stycznego odpowiadający tensorowi prędkości odkształcenia
$\Phi_c$	funkcja pracy dla katody i współczynnik dyfuzji termicznej dla elektronów
$\Phi, \Phi^{(e)}$	efektywna funkcja pracy dla materiałów elektrody w temp. pokojowej



## REFERENCES

- [1] R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, 2002, *Transport Phenomena*, Wiley, New York.
- [2] M.I. Boulos, P. Fauchais, E. Pfender, 1994, *Thermal Plasmas, Fundamentals and Applications*, Vol. 1, Plenum Press, New York and London.
- [3] L. Boltzmann, 1872, Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen *Sitzungsberichte Kaiserl. Akad. der Wissenschaften*, Wien 66, 275-370. (English translation in S.G. Brush, 1966 *Kinetic theory* Vol. 2, Irreversible processes, Pergamon Press, Oxford, 88-175).
- [4] C. Cercignani, 1988, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [5] C. Cercignani, 1990, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum Press, New York.
- [6] R.T.C. Choo, J. Szekely and R.C. Westhoff, 1990, Modelling of high-current arcs with emphasis on free surface phenomena in the weld-pool, *Welding Research Supplement*, September, 346-361-s.
- [7] R.T.C. Choo and J. Szekely, 1992, Vaporization kinetics and surface temperature in a mutually coupled spot gas tungsten arc weld and weld pool, *Welding Research Supplement* March 77-93-s.
- [8] Y.N. Dnestrowskii and D.P. Kostomarov, 1986, *Numerical Simulation of Plasmas*, Springer-Verlag, Berlin.
- [9] W. Elenbaas, 1934, Die quecksilber-hochdruckenladung, *Physica*, 1, 673-688.
- [10] J.P. Freidberg, 1987, *Ideal magnetohydrodynamics*, Plenum Press, New York.
- [11] M. Goodarzi, R. Choo, T. Takasu and J.M. Toguri, 1998, The effect of cathode tip angle on the gas tungsten arc welding arc and weld pool: Part II. The mathematical model for the weld pool, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 31, 569-583.
- [12] G. Heller, 1935, Dynamical similarity laws of the mercury high pressure discharge, *Physics*, 6, 389-394.
- [13] R.B. Heimann, 1996, *Plasma-spray coating*, VCH, Weinheim.
- [14] K.C. Hsu and E. Pfender, 1983, Analysis of the cathode region of a free-burning high intensity argon arc, *J. Appl. Phys.*, 54, 3818-3824.
- [15] J.D. Huba, 1994, NRL plasma formulary, *The Office of Naval Research*.
- [16] P. Kovitya and J.J. Lowke, 1985, Two-dimensional analysis of free burning arcs in argon, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 53-70.
- [17] J.E. Mayer and G.M. Mayer, 1977, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York.
- [18] H. Maecker, 1959, Über die charakteristiken zylindrischer bogen, *Zeitschrift für Physik*, 157, 1-29.
- [19] R. Morrow and J.J. Lowke, 1993, A one-dimensional theory for the electrode sheaths of electric arcs, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 26, 634-642.
- [20] P. Mensbach and J. Keck, 1969, Monte Carlo trajectory calculation at atomic excitation and ionization by thermal electrons, *Physical Review*, 181, 275-289.
- [21] K. Nishikawa and M. Wakatani, *Plasma Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [22] S.V. Patankar and D.B. Spalding, 1970, *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*, Intertext Books, London.
- [23] J. Ronda and G.J. Oliver, 2000, Consistent thermo-mechano-metallurgical model of welded steel with unified approach to derivation of phase evolution laws and transformation-induced plasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 189, 361-417.
- [24] L. Sansonnens, J. Haidar and J.J. Lowke, 2000, Prediction of properties of free burning arcs including effects of ambipolar diffusion, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 33, 148-157.
- [25] P.A. Sturrock, 1994, *Plasma Physics: An Introduction to the Theory of Astrophysical, Geophysical and Laboratory Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [26] M. Tanaka, T. Shimizu, H. Terasaki, M. Ushio, F. Koshi-ishi and C.L. Yang, 2000, Effects of activating flux on arc phenomena in gas tungsten arc welding, *Science and Technology of Welding and Joining*, 5, 397-402.
- [27] J.P. Van Doormaal and G.D. Raithby, 1984, Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flow, *Numerical Heat Transfer*, 7, 147-163.
- [28] R. Warren, 1955, Interpretation of field measurements in the cathode region of glow discharges, *Phys. Review*, 98, 1658-1664.
- [29] J. Wendelstorf, I. Decker, H. Wohlfahrt and G. Simon, 1997, TIG and plasma arc modelling: A survey, in: H. Cerjak (Ed.), *Mathematical Modelling of Weld Phenomena*, The Institute of Materials, London, 848-897.
- [30] J. Wendelstorf, 2000, Ab initio modelling of thermal plasma gas dischargers (electric arcs), Ph.D. Thesis, TU Braunschweig.
- [31] S.A. Wutzke, E. Pfender and E.R.G. Eckert, 1967, Study of electric-arc behavior with superimposed flow, *AIAA J.*, 5, 707-714.
- [32] X. Zhou and J. Heberlain, 1994, Analysis of the arc-cathode interaction of free-burning arcs, *Plasma Sources Sci. Technol.*, 3, 564-574.
- [33] P. Zhu, J.J. Lowke and R. Morrow, 1992, A unified theory of free burning arcs, cathode sheaths and cathodes, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 25, 1221-1230.

Artykuł otrzymano 15 grudnia 2002 r.