

ROZWIĄZYWANIE RÓWNIANIA POISSONA METODĄ SPEKTRALNĄ

BOGUSŁAW BOŻEK

SOLUTION OF POISSON EQUATION USING SPECTRAL METHOD

Abstract

Galerkin method is one of the most frequently used methods for approximate solution of differential equations. This approximate solution is most often searched in finite dimension vector space defined on first order splines obtained by triangularization of the domain Ω , in which the equation is defined. When the domain Ω is a cube, it is convenient to apply the spectral method, in which the approximate solution is searched in the space of polynomials. The orthogonal polynomials are selected as a basis of this space. This method was applied in the present work for the solution of Poisson equation in a cube.

Jedną z częściej stosowanych metod przybliżonych rozwiązywania równań różniczkowych, w tym równania Poissona, jest metoda Galerkina, przy czym zazwyczaj poszukuje się rozwiązania przybliżonego w skończonej wymiarowej przestrzeni wektorowej rozpiętej na splinach stopnia pierwszego indukowanych przez triangulację obszaru Ω , w którym jest określone równanie. Gdy obszar Ω jest kostką, wygodnie jest zastosować metodę spektralną, w której poszukuje się rozwiązania przybliżonego w przestrzeni wielomianów, przy czym jako bazę tej przestrzeni wybiera się wielomiany ortogonalne. W pracy stosuje się tę metodę do rozwiązywania równania Poissona określonego na kostce.

1 Zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona

Wariacyjne ujęcie zagadnienia brzegowego. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2, 3\}$) będzie ograniczonym zbiorem o brzegu lipschitzowskim. W przestrzeni Sobolewa (patrz Lions i Magenes, 1968 oraz Atkinson i Han, 2001)

$$H^1(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} (v^2 + \nabla v \cdot \nabla v)(x) dx < \infty \right\},$$

z normą

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \left(v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) (x) dx$$

wyróżniamy podprzestrzeń liniową funkcji próbnych:

$$V := H_0^1(\Omega) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Jest ona przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle \varphi | \psi \rangle := \int_{\Omega} (\nabla \varphi, \nabla \psi)(x) dx,$$

gdzie (\cdot, \cdot) jest iloczynem skalarnym w \mathbb{R}^n .

Szukamy rozwiązania $u \in H^1(\Omega)$ zagadnienia brzegowego Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{w } \Omega, \\ u = b & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $b : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami, przy czym b jest restrykcją do $\partial\Omega$ pewnej funkcji z $H^1(\Omega)$, natomiast

$$f \in \begin{cases} L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) & \text{dla } n > 2 \\ L^{1+\varepsilon}(\Omega) & \text{dla } n = 2 \end{cases}$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$. Dowodzi się, że problem ten jest równoważny znalezieniu takiej funkcji $u \in H^1(\Omega)$, że:

$$\begin{cases} u|_{\partial\Omega} = b \\ \forall_{\varphi \in V} \langle \varphi | u \rangle = -(f | \varphi)_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (2)$$

Niech $\bar{b} \in H^1(\Omega)$ będzie dowolnym rozszerzeniem funkcji b tzn.: $\bar{b}|_{\partial\Omega} = b$ w sensie teorii śladu. Jeżeli szukana

funkcję u przedstawimy w postaci

$$u = \overset{\circ}{u} + \bar{b},$$

to problem wariacyjny (2) jest równoważny znalezieniu takiej funkcji $\overset{\circ}{u} \in H_0^1(\Omega)$, że:

$$\forall_{\varphi \in V} \langle \varphi | \overset{\circ}{u} \rangle = - (f|\varphi)_{L^2(\Omega)} - \langle \varphi | \bar{b} \rangle. \quad (3)$$

Z lematu Laxa-Milgrama (Atkinson i Han, 2001) wynika w prosty sposób

Twierdzenie 1 *Zagadnienie brzegowe (2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Rozwiązanie zagadnienia (2) metodą Galerina. Załóżmy, że ciąg V_1, V_2, \dots skończenie wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni V jest aproksymacją wewnętrzną tej przestrzeni, tzn.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi, V_N) = 0 \quad \text{dla wszelkich } \varphi \in V,$$

gdzie $\text{dist}(\dots)$ oznacza odległość w sensie normy poddyktowanej przez iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Każdemu $N \in \mathbb{N}$ odpowiada rozwiązanie przybliżone

$$u_N := \overset{\circ}{u}_N + \bar{b},$$

gdzie $\overset{\circ}{u}_N \in V$ jest jedynym w V_N rozwiązaniem następującego skończenie wymiarowego zagadnienia wariacyjnego

$$\forall_{\varphi \in V_N} \langle \varphi | \overset{\circ}{u}_N \rangle = - (\varphi|f)_{L^2(\Omega)} - \langle \varphi | \bar{b} \rangle. \quad (4)$$

Wiarygodność obliczeń numerycznych uzasadnia następujące (patrz Atkinson i Han, 2001 oraz Bożek i Holly, 2001),

Twierdzenie 2 *Ciąg $(u_N)_{N=1}^\infty$ rozwiązań przybliżonych jest zbieżny w przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega)$ do jedynego rozwiązania u zagadnienia (2), tzn.*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N - u\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Zazwyczaj równanie wariacyjne (2) rozwiązuje się metodą elementu skończonego biorąc za przestrzeń V_N w równaniu (4) przestrzeń rozpiętą na splinach stopnia pierwszego indukowanych przez triangulację obszaru Ω (np. patrz Bożek i Holly, 2001). W sytuacji gdy obszar ten jest kostką, można wybrać inną aproksymację wewnętrzną przestrzeni $H_0^1(\Omega)$. Nasze rozważania ograniczymy do kostki $[-1, 1]^d \in \mathbb{R}^d$, przy czym na wstępie omówimy przypadek $d = 1$, który uogólnimy na $d = 2$ i $d = 3$. Do aproksymacji wykorzystamy wielomiany ortogonalne, którymi w przypadku odcinka $\Lambda := [-1, 1]$ i wagi $p(x) = 1$ są wielomiany Legendre'a, a w przypadku $\Omega = \Lambda^d$ ($d = 2, 3$) iloczyny tensorowe $L_{n_1} \otimes L_{n_2}$, $L_{n_1} \otimes L_{n_2} \otimes L_{n_3}$ tych wielomianów.

2 Wielomiany Legendre'a

Wielomiany Legendre'a są określone wzorem

$$L_n := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Dowodzi się, że wielomiany Legendre'a można zapisać w jawnej postaci

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{2n-2i}{n} x^{n-2i},$$

oraz, że spełniają one związek rekurencyjny:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \\ &(n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Wielomiany te są ortogonalne z wagą $p(x) = 1$ na odcinku $[-1, 1]$ tj.

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m,$$

a ponadto

$$\|L_n\|^2 := \int_{-1}^1 (L_n(x))^2 dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Jeśli wielomian Legendre'a L_n zapiszemy w postaci

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \gamma_i^{(n)} x^i,$$

to ze wzoru (5) w naturalny sposób wynika zależność rekurencyjna na współczynnikach:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(n)} &= \frac{1-n}{n} \gamma_0^{(n-2)}, \\ \gamma_i^{(n)} &= \frac{2n-1}{n} \gamma_{i-1}^{(n-1)} + \frac{1-n}{n} \gamma_i^{(n-2)} \\ &(i = 1, \dots, n-2), \\ \gamma_{n-1}^{(n)} &= \frac{2n-1}{n} \gamma_{n-2}^{(n-1)}, \\ \gamma_n^{(n)} &= \frac{2n-1}{n} \gamma_{n-1}^{(n-1)}, \end{aligned}$$

przy czym $\gamma_0^{(0)} = 1$, $\gamma_0^{(1)} = 0$, $\gamma_1^{(1)} = 1$.

Można także znaleźć rekurencyjną zależność między pochodnymi wielomianów Legendre'a, mianowicie:

$$\begin{aligned} L'_0(x) &= 0, \\ L'_1(x) &= 1, \\ L'_{n+1}(x) &= (2n+1)L_n(x) + L'_{n-1}(x) \\ &(n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Jeśli pochodną wielomianu Legendre'a L'_n zapiszemy w postaci

$$L'_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^{(n)} x^i,$$

to ze wzoru (7) wynikają następujące związki rekurencyjne na współczynniki:

$$\delta_i^{(n)} = (2n-1)\gamma_i^{(n-1)} + \delta_i^{(n-2)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-3),$$

$$\delta_{n-2}^{(n)} = (2n-1)\gamma_{n-2}^{(n-1)},$$

$$\delta_{n-1}^{(n)} = (2n-1)\gamma_{n-1}^{(n-1)},$$

przy czym $\delta_0^{(0)} = 0$, $\delta_0^{(1)} = 1$, $\delta_0^{(2)} = 0$, $\delta_1^{(2)} = 3$.

3 Metoda spektralna

Niech $P_k(\Omega)$ oznacza przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnie nie większego niż k , a $P_k^0(\Omega)$ podprzestrzeń wielomianów zerujących się na brzegu Ω . Ciąg przestrzeni $P_k^0(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) stanowi aproksymację wewnętrzną przestrzeni Sobolewa $H_0^1(\Omega)$. Zauważmy, że jeśli $\varphi \in P_k(\Omega)$, to wielomian φ^* określony zależnością $\varphi^*(x) := \varphi(x) - \varphi(-1)\frac{1-x}{2} - \varphi(1)\frac{1+x}{2}$ jest elementem przestrzeni $P_k^0(\Omega)$.

Przybliżonego rozwiązania równania (1) będziemy poszukiwać rozwiązując równanie wariacyjne (4) w którym $V_N := P_N^0(\Omega)$. W pierwszej kolejności zajmiemy się przypadkiem $d = 1$, czyli sytuacją gdy $\Omega = \Lambda$.

Ustalmy $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Niech $\xi_0 := -1$, $\xi_N := 1$, a ξ_j ($j = 1, \dots, N-1$) niech będą pierwiastkami wielomianu $L'_N(x)$. Skonstruowana na tych węzłach kwadratura jest kwadraturą Gaussa, a zatem

$$\forall \Phi \in P_{2N-1}(\Lambda) \quad \int_{-1}^1 \Phi(x) dx = \sum_{j=0}^N \rho_j \Phi(\xi_j), \quad (8)$$

przy czym

$$\rho_j := \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}. \quad (9)$$

Niech l_j ($j = 0, \dots, N$) będą wielomianami stopnia N takimi, że $l_j(\xi_j) = 1$ i $l_j(\xi_i) = 0$ dla $i \neq j$, czyli

$$l_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N \frac{x - \xi_i}{\xi_j - \xi_i}.$$

Każdy z wielomianów l_j można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$l_j(x) = \sum_{s=0}^N \alpha_{js} L_s(x). \quad (10)$$

Korzystając z ortogonalności wielomianów Legendre'a, wzoru (8) oraz (6) i definicji wielomianu l_j mamy

$$\alpha_{js} = \frac{\int_{-1}^1 l_j(x) L_s(x) dx}{\int_{-1}^1 L_s^2(x) dx} =$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^N \rho_m l_j(\xi_m) L_s(\xi_m)}{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}} = \frac{\rho_j L_s(\xi_j)}{\frac{1}{s+\frac{1}{2}}},$$

czyli ostatecznie

$$\alpha_{js} = \left(s + \frac{1}{2}\right) \rho_j L_s(\xi_j) \quad (j, s = 0, \dots, N). \quad (11)$$

Pochodną wielomianu Legendre'a L'_n można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$L'_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{ni} L_i(x). \quad (12)$$

Korzystając z (7) dostajemy wzór rekurencyjny na współczynniki β_{ni} :

$$\beta_{n+1,n} = 2n+1,$$

$$\beta_{n+1,n-1} = 0,$$

$$\beta_{n+1,i} = \beta_{n-1,i} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

oraz $\beta_{10} = 1$, $\beta_{20} = 0$, $\beta_{21} = 3$. Ze wzoru tego wynika, że

$$\beta_{ni} = \begin{cases} n+i & \text{jeśli } n+i \text{ nieparzyste,} \\ 0 & \text{jeśli } n+i \text{ parzyste.} \end{cases} \quad (13)$$

W przypadku jednowymiarowym $d = 1$ poszukujemy rozwiązania równania (4) w postaci

$$\tilde{u} := \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i l_i. \quad (14)$$

Jako funkcję \bar{b} bierzemy

$$\bar{b} := b(\xi_0)l_0 + b(\xi_N)l_N, \quad (15)$$

a funkcję f zastępujemy wielomianem interpolacyjnym zbudowanym na węzłach ξ_i tj.:

$$f \approx \sum_{i=0}^N f(\xi_i) l_i. \quad (16)$$

Wstawiając (14), (15), (16) do (4) dostajemy układ równań:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \langle l_i | l_j \rangle = - \sum_{k=0}^N f(\xi_k) \langle l_k | l_j \rangle_{L^2(\Lambda)} + \langle \bar{b} | l_j \rangle_{L^2(\Lambda)} - b(\xi_0) \langle l_0 | l_j \rangle - b(\xi_N) \langle l_N | l_j \rangle \quad (j = 1, \dots, N-1). \quad (17)$$

Dalej pokażemy, jak efektywnie wyliczyć występujące w tym układzie równań iloczyny skalarne $\langle l_i | l_j \rangle_{L^2(\Lambda)}$.

Przedstawiając zgodnie ze wzorem (10) wielomiany l_k i l_j w postaci $l_k = \sum_{p=0}^N \alpha_{kp} L_p$, $l_j = \sum_{q=0}^N \alpha_{jq} L_q$ i korzystając z ortogonalności wielomianów Legendre'a mamy:

$$\begin{aligned} \langle l_k | l_j \rangle_{L^2(\Lambda)} &= \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \alpha_{kp} \alpha_{jq} \langle L_p | L_q \rangle_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \sum_{p=0}^N \alpha_{kp} \alpha_{jp} \langle L_p | L_p \rangle_{L^2(\Lambda)} = \sum_{p=0}^N \frac{\alpha_{kp} \alpha_{jp}}{p + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

tak więc

$$(l_k|l_j)_{L^2(\Lambda)} = \sum_{p=0}^N \frac{\alpha_{kp}\alpha_{jp}}{p + \frac{1}{2}} \quad (k, j = 0, \dots, N). \quad (18)$$

Łącząc wzory (10), (12) możemy zapisać pochodne l'_i, l'_j w postaci:

$$l'_i = \sum_{k=1}^N \sum_{q=0}^{k-1} \alpha_{ik}\beta_{kq}L_q, \quad l'_j = \sum_{m=1}^N \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_{jm}\beta_{mp}L_p.$$

Dalej mamy:

$$\begin{aligned} \langle l_j|l'_i \rangle &= (\nabla l_j|\nabla l_i)_{L^2(\Lambda)} = (l'_j|l'_i)_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \left(\sum_{m=1}^N \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_{jm}\beta_{mp}L_p \middle| \sum_{k=1}^N \sum_{q=0}^{k-1} \alpha_{ik}\beta_{kq}L_q \right)_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \sum_{k,m=1}^N \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_{ik}\beta_{kq}\alpha_{jm}\beta_{mp} (L_q|L_p)_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \sum_{q,p=0}^{N-1} \sum_{k=q+1}^N \sum_{m=p+1}^N \alpha_{ik}\beta_{kq}\alpha_{jm}\beta_{mp} (L_q|L_p)_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=p+1}^N \sum_{m=p+1}^N \alpha_{ik}\alpha_{jm}\beta_{kp}\beta_{mp} (L_p|L_p)_{L^2(\Lambda)} = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=p+1}^N \sum_{m=p+1}^N \frac{\alpha_{ik}\alpha_{jm}\beta_{kp}\beta_{mp}}{p + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Tak więc ostatecznie

$$\langle l_j|l'_i \rangle = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=p+1}^N \sum_{m=p+1}^N \frac{\alpha_{ik}\alpha_{jm}\beta_{kp}\beta_{mp}}{p + \frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$(i, j = 0, \dots, N).$$

W przypadku dwuwymiarowym $d = 2$ poszukujemy rozwiązania równania (4) w postaci

$$\tilde{u} := \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{ij} l_i \otimes l_j. \quad (20)$$

Jako funkcję \bar{b} bierzemy

$$\begin{aligned} \bar{b} &\approx \sum_{j=0}^N (b(\xi_0, \xi_j) l_0 \otimes l_j + b(\xi_N, \xi_j) l_N \otimes l_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} (b(\xi_i, \xi_0) l_i \otimes l_0 + b(\xi_i, \xi_N) l_i \otimes l_N), \quad (21) \end{aligned}$$

a funkcję f zastępujemy wielomianem interpolacyjnym zbudowanym na węzłach $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\}^2$ tj.:

$$f \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N f(\xi_i, \xi_j) l_i \otimes l_j. \quad (22)$$

Wstawiając (20), (21), (22) do (4) dostajemy układ równań:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{ij} \langle l_i \otimes l_j | l_p \otimes l_q \rangle &= \\ &= - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N f(\xi_i, \xi_j) (l_i \otimes l_j | l_p \otimes l_q)_{L^2(\Omega)} + \\ &- \sum_{j=0}^N b(\xi_0, \xi_j) \langle l_0 \otimes l_j | l_p \otimes l_q \rangle + \\ &- \sum_{j=0}^N b(\xi_N, \xi_j) \langle l_N \otimes l_j | l_p \otimes l_q \rangle + \\ &- \sum_{i=1}^{N-1} b(\xi_i, \xi_0) \langle l_i \otimes l_0 | l_p \otimes l_q \rangle + \\ &- \sum_{i=1}^{N-1} b(\xi_i, \xi_N) \langle l_i \otimes l_N | l_p \otimes l_q \rangle, \quad (23) \end{aligned}$$

gdzie $\Omega = \Lambda \times \Lambda$, $(p, q) \in \{1, \dots, N-1\}^2$. Układ ten możemy zapisać w postaci macierzowej indeksując według wzoru

$$\begin{aligned} \{1, \dots, N-1\}^2 \ni (m, n) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow (m-1) \cdot (N-1) + n \in \{1, \dots, (N-1)^2\}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} (l_i \otimes l_j | l_p \otimes l_q)_{L^2(\Omega)} &:= \\ &:= \int_{[-1,1] \times [-1,1]} (l_i \otimes l_j)(x, y) (l_p \otimes l_q)(x, y) dx dy = \\ &= \left(\int_{-1}^1 l_i(x) l_p(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^1 l_j(y) l_q(y) dy \right) = \\ &= (l_i | l_p)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_j | l_q)_{L^2(\Lambda)}, \end{aligned}$$

zatem ostatecznie mamy

$$(l_i \otimes l_j | l_p \otimes l_q)_{L^2(\Omega)} = (l_i | l_p)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_j | l_q)_{L^2(\Lambda)}. \quad (24)$$

Ponieważ

$$\nabla (l_i \otimes l_j) = \begin{pmatrix} l'_i \otimes l_j \\ l_i \otimes l'_j \end{pmatrix},$$

zatem licząc podobnie jak powyżej otrzymujemy wzór:

$$\langle l_i \otimes l_j | l_p \otimes l_q \rangle = \langle l_i | l_p \rangle \cdot \langle l_j | l_q \rangle_{L^2(\Lambda)} + \langle l_i | l_p \rangle_{L^2(\Lambda)} \cdot \langle l_j | l_q \rangle. \quad (25)$$

W przypadku trójwymiarowym $d = 3$ poszukujemy rozwiązania przybliżonego w postaci

$$\tilde{u} := \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{ijk} l_i \otimes l_j \otimes l_k.$$

Funkcję f zastępujemy wielomianem interpolacyjnym skonstruowanym na węzłach $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\}^3$ tj.:

$$f \approx \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N f(\xi_i, \xi_j, \xi_k) l_i \otimes l_j \otimes l_k,$$

natomiast jako funkcję \bar{b} najwygodniej jest podstawić wielomian

$$\begin{aligned} \bar{b} \approx & \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N b(\xi_i, \xi_j, \xi_0) l_i \otimes l_j \otimes l_0 + \\ & + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N b(\xi_i, \xi_j, \xi_N) l_i \otimes l_j \otimes l_N + \\ & + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^{N-1} b(\xi_i, \xi_0, \xi_k) l_i \otimes l_0 \otimes l_k + \\ & + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^{N-1} b(\xi_i, \xi_N, \xi_k) l_i \otimes l_N \otimes l_k + \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} b(\xi_0, \xi_j, \xi_k) l_0 \otimes l_j \otimes l_k + \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} b(\xi_N, \xi_j, \xi_k) l_N \otimes l_j \otimes l_k. \end{aligned}$$

Wszystkie przeliczenia wyglądają analogicznie jak w przypadku dwuwymiarowym. Łatwo wyprowadzić związek:

$$\begin{aligned} (l_i \otimes l_j \otimes l_k | l_p \otimes l_q \otimes l_r)_{L^2(\Omega)} = \\ = (l_i | l_p)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_j | l_q)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_k | l_r)_{L^2(\Lambda)}, \end{aligned}$$

gdzie $\Omega = \Lambda^3$ oraz wzór

$$\begin{aligned} (l_i \otimes l_j \otimes l_k | l_p \otimes l_q \otimes l_r) = \\ = (l_i | l_p) \cdot (l_j | l_q)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_k | l_r)_{L^2(\Lambda)} + \\ + (l_i | l_p)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_j | l_q) \cdot (l_k | l_r)_{L^2(\Lambda)} + \\ + (l_i | l_p)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_j | l_q)_{L^2(\Lambda)} \cdot (l_k | l_r). \end{aligned}$$

Powstały układ można zapisać w postaci macierzowej korzystając z bijekcji

$$\begin{aligned} \{1, \dots, N-1\}^3 \ni (i, j, k) \longrightarrow \\ \longrightarrow (i-1) \cdot (N-1)^2 + (j-1) \cdot (N-1) + k \\ \in \{1, \dots, (N-1)^3\}. \end{aligned}$$

Za książką Blowey i in. (2002) przytaczamy jedno z twierdzeń o zbieżności omówionej metody spektralnej:

Twierdzenie 3 *Jeśli $d = 2$, $f \in H^4(\Omega)$, $b = 0$, to istnieje taka stała $c > 0$, że*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq cN^{-4} (\log N)^{\frac{3}{2}} \|f\|_{H^4(\Omega)},$$

gdzie u jest rozwiązaniem (2), a \tilde{u} rozwiązaniem (23).

Macierz układów (17), (23) (jak również macierz układu w przypadku trójwymiarowym) jest w metodzie spektralnej macierzą symetryczną, w której praktycznie wszystkie elementy są niezerowe. Znacząco ogranicza to klasę metod numerycznych rozwiązywania tego układu. W grę wchodzi metody dokładne takie jak metoda eliminacji Gaussa-Jordana, metoda rozkładu macierzy układu

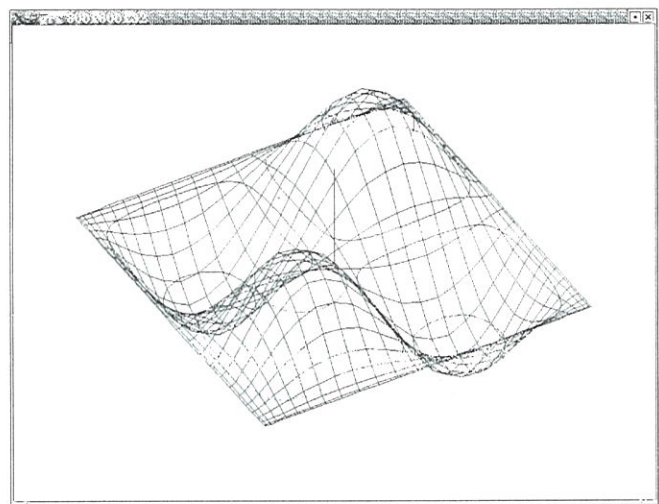
na czynniki trójkątne, czy rozkładu na iloczyn macierzy trójkątnej i ortogonalnej. Ponieważ macierz układu jest pełna, pojawiają się dla dużych wartości N kłopoty z pamięcią komputera i czasem obliczeń. Metoda jest jednak łatwa do oprogramowania i daje dobre rezultaty numeryczne.

Przykład 1

Dla funkcji $f \equiv 0$ i $b_{|\partial\Omega} \equiv 1.0$ jedynym rozwiązaniem równania (1) jest funkcja stała $u \equiv 1.0$. Dla $N = 25$ wyliczone wartości rozwiązania mieściły się w przedziale [0.999979, 1.000102].

Przykład 2

Dla funkcji $f(x, y) = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ i $b_{|\partial\Omega} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ rozwiązaniem równania (1) jest funkcja $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Rysunek 1 poniżej prezentuje rezultat obliczeń.



Rysunek 1: Rozwiązanie numeryczne równania (1) z przykładu 2.

Po nieznaczących zmianach można zastosować tę metodę do rozwiązywania równania Helmholtza $\Delta u - \kappa^2 u = f$.

Autor może udostępnić zainteresowanym kod źródłowy programu w języku C.

Literatura

- Atkinson K., Han W., Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework, 2001 Springer-Verlag New York, Inc.
- Blowey J.F., Coleman J.P., Craig A.W., Theory and Numerics of Differential Equations, Durham 2000, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.
- Bożek B., Holly K., Stacjonarny rozkład ciepła w ośrodku niejednorodnym, Informatyka w technologii materiałów, Nr 2, tom 1, 2001, str. 61-72.
- Lions J.-L., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol. 1 et 2, Paris, Dunod, 1968.

Artykuł otrzymano 15 listopada 2002 r.