Wydawnictwo
Naukowe
AKAPIT

INFORMATYKA W TECHNOLOGII MATERIAŁÓW

Numer 1, Tom 2, Rok 2002

MODYFIKACJA WIELOMIANOWYCH KRZYWYCH BÉZIERA

BOGUSŁAW BOŻEK, PROKOP ŚRODA

MODYFICATION OF POLYNOMIAL BÉZIER'S CURVES

Abstract

The this paper some modification of polynomial Bézier curves is presented. By choise the vector $v \in R^3$ and the parameter $t \in (0, 1)$ one can influence signicantly onto change the shape the Bézier's curves.

1. WPROWADZENIE

Problemy dobierania (modelowania) krzywych i powierzchni występują w wielu dziedzinach nauki i techniki. Po raz pierwszy P.Bézier i niezależnie de Casteljau zaproponowali wykorzystanie wielomianów Bernsteina do opisu konstruowanych krzywych. P.Bézier zastosował tę metodę do komputerowego projektowania karoserii samochodu Renault. Stąd krzywe te nazywają się krzywymi Béziera.

2. DEFINICJA KRZYWEJ BÉZIERA

Krzywą Béziera (patrz [1], [3]) definiuje się jako kombinację liniową wielomianów Bernsteina:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t) \qquad t \in [0,1]$$

gdzie $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ są danymi punktami przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$, zaś wielomiany Bernsteina są opisane zależnościami:

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i,$$

gdzie $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Wielomiany Bernsteina posiadają następującą własność:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

dla $t \in [0,1]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Własność ta jest podstawą algorytmu obliczania $Q(t)$, czyli wyznaczania dowolnego punktu krzywej Béziera.

3. ALGORYTM DE CASTELJAU

Algorytm geometryczny (**de Casteljau**) wyznaczania punktów krzywej Béziera:

1. Wybieramy $t \in [0,1]$,
2. Dla $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ podstawiamy $P_{i,0} \leftarrow P_i$,
3. Dla $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \in \{j, j+1, \ldots, n\}$ podstawiamy

$$P_{i,j} \leftarrow (1-t)P_{i-1,j-1} + tP_{i,j-1},$$

4. $Q(t) := P_{n,n}$.

B. Bożek, Wydział Matematyki Stosowanej, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
P. Środa, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

ISSN 1641-8581

Obliczone wartości $P_{n,j}$ można zestawić w kolumnach

$$\begin{array}{llllll}
P_{0,0} & & & & & \\
P_{1,0} & P_{1,1} & & & & \\
P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\
P_{n-1,0} & P_{n-1,1} & P_{n-1,2} & & \ddots & \\
P_{n,0} & P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & \dots & P_{n,n}
\end{array}$$

gdzie pierwszą kolumnę tworzą dane punkty wiodące $P_i = P_{i,0}$ krzywej Béziera, a każda następna kolumna powstaje z punktów, które dzielą odcinki łączące sąsiednie punkty poprzedniej kolumny w stosunku $\frac{t}{1-t}$ (dla $t \neq 1$). Punkt ostatniej kolumny jest punktem krzywej dla przyjętej wartości parametru t, czyli $P_{n,n} := Q(t)$.

Łatwo pokazać, że $Q(0) = P_0$, $Q(1) = P_n$, czyli krzywa Béziera przechodzi przez początkowy i końcowy punkt wiodący tj. P_0 i P_n. Pochodne w tych punktach są określone zależnościami

$$Q'(0) = n \cdot (P_1 - P_0)\,, \quad Q'(1) = n \cdot (P_n - P_{n-1})\,.$$

Wynika stąd wniosek, że styczna do krzywej Béziera w punkcie P_0 przechodzi przez punkty P_0 i P_1 oraz, że styczna w punkcie P_n przechodzi przez punkty P_n i P_{n-1}.

4. MODYFIKACJA WIELOMIANOWYCH KRZYWYCH BÉZIERA

Przy stosowaniu krzywych Béziera w grafice komputerowej często zachodzi potrzeba ich modyfikacji w celu uelastycznienia doboru kształtu krzywej. Pewne przykłady takich modyfikacji można znaleźć w książce [2]. Autorzy proponują opisany poniżej prosty sposób.

Niech $v \in \mathbb{R}^3$ będzie ustalonym wektorem, a $t^\star \in (0,1)$ ustaloną liczbą. Zdefiniujmy funkcję $S : \mathbb{R} \supset [0,1] \to \mathbb{R}^3$ wzorem:

$$S(t) := \begin{cases} \frac{2t}{t^\star} - \frac{t^2}{(t^\star)^2} & \text{dla} \quad t \in [0, t^\star] \\ \frac{-t^2 + 2t^\star t - 2t^\star + 1}{(t^\star - 1)^2} & \text{dla} \quad t \in [t^\star, 1]. \end{cases}$$

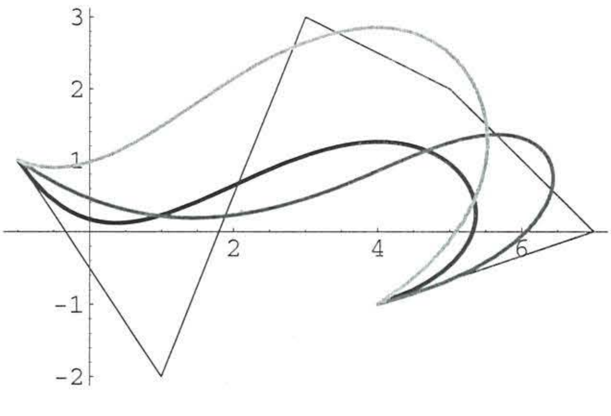
Funkcja ta, jak łatwo sprawdzić, jest funkcją klasy $C^1([0,1])$, zatem funkcja

$$R(t) := Q(t) + S(t)v$$

jest gładką krzywą, którą możemy nazwać zmodyfikowaną krzywą Béziera. Poprzez dobór stałej $t^\star$ i wektora v możemy znacząco wpływać na kształt krzywej R. Zmodyfikowana krzywa Béziera przechodzi przez początkowy i końcowy punkt wiodący tj. P_0 i P_n, a pochodne w tych punktach są określone zależnościami:

$$\begin{aligned} R'(0) &= n \cdot (P_1 - P_0) + \frac{2}{t^\star} v, \\ R'(1) &= n \cdot (P_n - P_{n-1}) + \frac{2}{t^\star - 1} v. \end{aligned}$$

Rysunek 1 przedstawia krzywą Béziera na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ skonstruowaną dla punktów wiodących $P_0(-1,1)$, $P_1(-2,1)$, $P_2(3,3)$, $P_3(5,2)$, $P_4(7,0)$, $P_5(4,-1)$ (kolor czarny) a także dwie zmodyfikowane krzywe Béziera dla $t^\star = 0.34$ i $v = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 0.11 \end{pmatrix}$ (kolor ciemno-szary) i takiej samej wartości $t^\star$ oraz $v = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.7 \end{pmatrix}$ (kolor szary).



Rysunek 1. Krzywa Béziera i jej dwie modyfikacje.

5. INTERPOLACJA KRZYWYMI BÉZIERA

Interpolacja krzywymi Béziera polega na konstruowaniu między kolejnymi punktami interpolacyjnymi odcinków krzywych Béziera stopnia trzeciego w ten sposób, by w każdym punkcie interpolacyjnym pochodne obu łączonych krzywych były jednakowe. Przyjmujemy, że danym punktom P_i, $(i = 0, 1, \dots, k)$ odpowiadają wartości t_i parametru t. Punkty P_{i-1} oraz P_i dla $i = 1, 2, \dots, k$ są punktami końcowymi poszczególnych fragmentów krzywych Béziera stopnia trzeciego. Dwa środkowe punkty wiodące, które oznaczymy $P_{i-\frac{2}{3}}$ i $P_{i-\frac{1}{3}}$ dobiera się w ten sposób, by zachować ciągłość stycznej do krzywej w punkcie P_i. Kierunek stycznej s_i w punkcie P_i dobiera się tak, by pokrywał się ze styczną do paraboli przechodzącej przez punkty P_{i-1}, P_i, P_{i+1} przy wartościach parametru t_{i-1}, t_i, t_{i+1}. Kierunek stycznej wyznacza się ze związku

$$s_i = (1 - \alpha_i) \cdot C_{i-1} + \alpha_i \cdot C_i,$$

gdzie $\alpha_i = \frac{t_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_{i-1}}$, $C_{i-1} = \frac{P_i - P_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$, $C_i = \frac{P_{i+1}-P_i}{t_{i+1}-t_i}$.

Dla punktów brzegowych $i = 0$ oraz $i = k$ mamy:

$$\begin{aligned} s_0 &= 2C_0 - s_1, \\ s_k &= 2C_{k-1} - s_{k-1} \end{aligned}$$

Środkowe punkty wiodące, dla każdej składowej krzywej Béziera wyznacza się ze wzorów:

$$\begin{aligned} P_{i-\frac{2}{3}} &= P_{i-1} + \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})\, s_{i-1}, \\ P_{i-\frac{1}{3}} &= P_i - \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})\, s_i. \end{aligned}$$

Przy interpolacji zmodyfikowanymi krzywymi Béziera wystarczy tylko inaczej zdefiniować środkowe punkty wiodące. W tym wypadku należy zastosować wzory:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{i-\frac{2}{3}} &= P_{i-1} + \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})\left(s_{i-1} - \frac{2}{t^*}v\right), \\ \widehat{P}_{i-\frac{1}{3}} &= P_i - \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})\left(s_i - \frac{2}{t^* - 1}v\right). \end{aligned}$$

Przykład 1 *Wyznaczyć krzywą Béziera interpolującą punkty $P_0(0,0)$, $P_1(0,6)$, $P_2(6,6)$, $P_3(6,0)$ przy następujących węzłach: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$.*

Na podstawie przedstawionych wzorów obliczamy:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

$$C_0 = P_1 - P_0,\ C_1 = P_2 - P_1,\ C_2 = P_3 - P_2,$$

$$s_0 = -\frac{3}{2}P_0 + 2P_1 - \frac{1}{2}P_2,\ s_1 = \frac{1}{2}(P_2 - P_0),$$
$$s_2 = \frac{1}{2}(P_3 - P_1),\ s_3 = \frac{1}{2}P_1 - 2P_2 + \frac{3}{2}P_3,$$

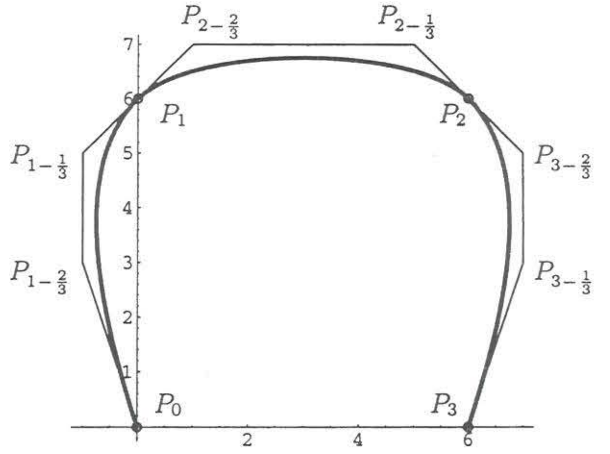
a także po uwzględnieniu współrzędnych punktów poszukiwane punkty wiodące:

$$P_{1-\frac{2}{3}}(-1,3),\ P_{1-\frac{1}{3}}(-1,5),\ P_{2-\frac{2}{3}}(1,7),$$
$$P_{2-\frac{1}{3}}(5,7),\ P_{3-\frac{2}{3}}(7,5),\ P_{3-\frac{1}{3}}(7,3).$$

Krzywa Béziera interpolująca punkty P_0, P_1, P_2, P_3 składa się z trzech krzywych stopnia trzeciego $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $Q_3(t)$ opisanych wzorami:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= (-3t(1-t), 3t(3-t)), \\ Q_2(t) &= \left(-3t(-2t^2+3t+1), 3(-t^2+t+2)\right), \\ Q_3(t) &= \left(-3(-t^2+t+2), 3(1-t)(t+2)\right) \end{aligned}$$

dla $t \in [0,1]$ i jest przedstawiona na rysunku 2:



Rysunek 2. Interpolacyjna krzywa Béziera interpolująca punkty P_0, P_1, P_2, P_3.

Przykład 2 *Wyznaczyć zmodyfikowaną krzywą Béziera interpolującą punkty z poprzedniego przykładu przy tych samych węzłach biorąc $t^* = \frac{1}{2}$ oraz $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.*

Zgodnie z przedstawionymi wzorami punkty pośrednie są równe:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{1-\frac{2}{3}} &= P_0 + \frac{1}{3}(s_0 - 4v) = P_{1-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}v = (-1,2), \\ \widehat{P}_{1-\frac{1}{3}} &= P_1 - \frac{1}{3}(s_1 + 4v) = P_{1-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}v = (-1,6), \\ \widehat{P}_{2-\frac{2}{3}} &= P_1 + \frac{1}{3}(s_1 - 4v) = P_{2-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}v = (1,6), \\ \widehat{P}_{2-\frac{1}{3}} &= P_2 - \frac{1}{3}(s_2 + 4v) = P_{2-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}v = (5,8), \\ \widehat{P}_{3-\frac{2}{3}} &= P_2 + \frac{1}{3}(s_2 - 4v) = P_{3-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}v = (7,4), \\ \widehat{P}_{3-\frac{1}{3}} &= P_3 - \frac{1}{3}(s_3 + 4v) = P_{3-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}v = (7,4). \end{aligned}$$

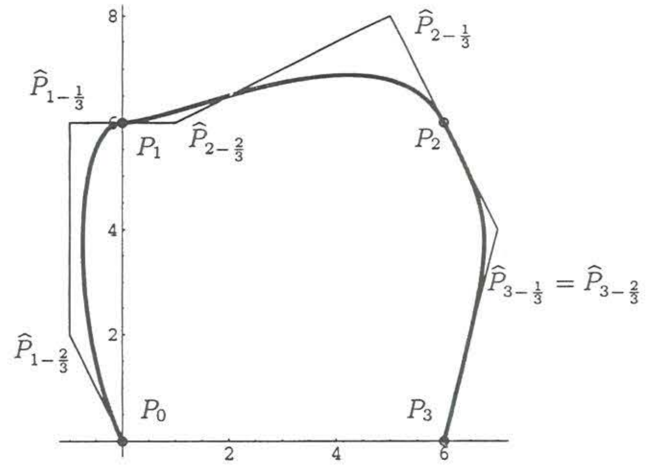
Jak widać, skonstruowane pośrednie punkty wiodące mogą się pokrywać. W tym przypadku

$$\widehat{P}_{3-\frac{2}{3}} = \widehat{P}_{3-\frac{1}{3}} = (7,4).$$

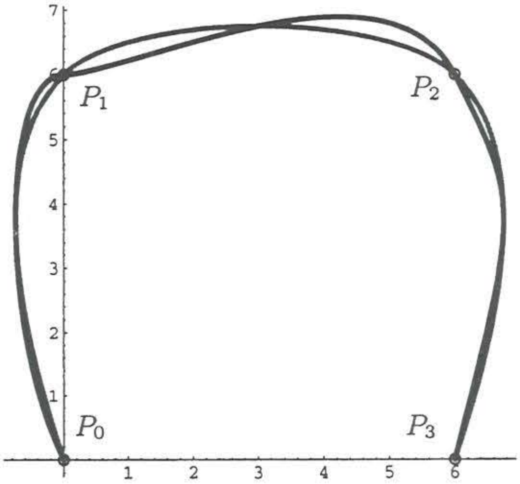
Krzywa Béziera interpolująca punkty P_0, P_1, P_2, P_3 składa się z trzech krzywych stopnia trzeciego $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ opisanych wzorami:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= (-3t(1-t), 6t(1+t-t^2)), \\ R_2(t) &= \left(-3t(-2t^2+3t+1), 6(1+t^2-t^3)\right), \\ R_3(t) &= \left(-3(-t^2+t+2), 6(1-t+t^2-t^3)\right) \end{aligned}$$

dla $t \in [0,1]$ i jest przedstawiona na rysunku 3:



Rysunek 3. Zmodyfikowana krzywa Béziera interpolująca punkty P_0, P_1, P_2, P_3.



Rysunek 4. Interpolacja punkty P_0, P_1, P_2, i P_3 krzywą Béziera i zmodyfikowaną krzywą Béziera.

Dla porównania przedstawiamy obydwie krzywe na jednym rysunku.

6. PODSUMOWANIE

Przy stosowaniu krzywych Béziera w grafice komputerowej często zachodzi potrzeba ich modyfikacji w celu uelastycznienia doboru kształtu krzywej. Autorzy zaproponowali prostą modyfikację tych krzywych, którą determinuje wybór wektora $v \in \mathbb{R}^3$ i stałej $t^* \in (0, 1)$. O wyborze tych parametrów decyduje jedynie zamierzony efekt graficzny.

LITERATURA

[1] Bézier, P., 1972, *Numerical control - mathematics and applications*, John Wiley and Sons, London.

[2] Kiciak, P., 2000, *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni - zastosowania w grafice komputerowej*, WNT, Warszawa.

[3] Środa, P., Bożek, B., 1999, Krzywe i powierzchnie Béziera, *Konferencja o geometrii, Częstochowa, Konferencje 34*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej.

Artykuł otrzymano 20 września 2002 r.