

STABILIZACJA ALGORYTMU MES W ROZWIĄZANIACH ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA W WARUNKACH KONWEKCJI ZE ŹRÓDŁEM CIEPŁA

ZBIGNIEW MALINOWSKI

STABILIZATION OF FEM ALGORITHM IN APPLICATION TO HEAT TRANSPORT EQUATION WITH CONVECTION AND INTERNAL HEAT SOURCE

Abstract

Stability of FEM algorithms in applications to heat transport equation with convection and internal heat source has been investigated in the paper. Various possibilities of modelling of time dependence were tested. The results of computations have shown lack of stability of steady state solutions in case of material flow with high gradients of the velocity field. Tube rolling process is considered as an example. This process involves significant inhomogeneity of velocity field. Stabilization of solutions using upwind finite element schemes does not always leads to satisfactory results, as well. It is caused by high gradient of the velocity field in the tube rolling. Stable results can be obtained using non steady state solutions with convection. It is necessary, however, to use a proper number of elements.

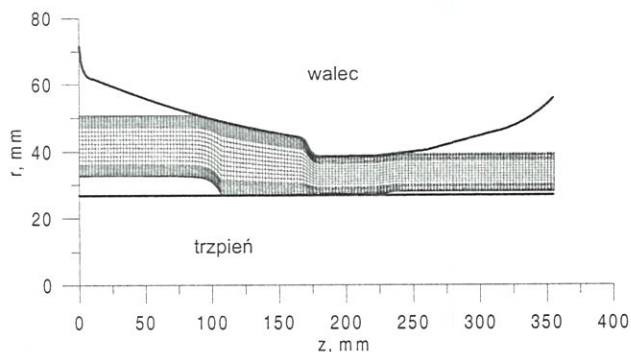
1. WSTĘP

W procesach przeróbki plastycznej takich jak walcowanie, ciągnięcie lub wyciskanie możliwe jest w szeregu przypadkach zastosowanie rozwiązań stacjonarnych. Podejście takie zazwyczaj prowadzi do zadowalających rezultatów, przy wielokrotnie krótszym czasie obliczeń numerycznych. Rozwiązania stacjonarne wymagają jednak stosowania technik iteracyjnych w przypadku nieznanego kształtu materiału po odkształceniu plastycznym. Problem ten jest rozwiązywany przez zastosowanie odpowiednich procedur poprawiania kształtu powierzchni swobodnych i zazwyczaj daje rozwiązania zbieżne. W przypadku procesów trójwymiarowych takich jak walcowanie kształ-

towników, dziurowanie lub wydłużanie tulei w walcarkach skośnych, zmiany kształtu materiału zmuszają do stosowania rozwiązań iteracyjnych zbliżonych do rozwiązań niestacjonarnych pod względem liczby wykonywanych korekt kształtu i własności materiału. Jednym z istotniejszych problemów jest wzajemne oddziaływanie pola temperatury i pola odkształceń w kolejnych iteracjach. W pracy badano stabilność rozwiązania pola temperatury w procesie wydłużania tulei dla dwóch przypadków różniących się współczynnikiem wydłużenia. W celu wyznaczenia pola temperatury zastosowano cztery różne schematy numeryczne, dwa schematy stacjonarne z niesymetrycznymi funkcjami wagi oraz dwa rozwiązania niestacjonarne z uwzględnieniem konwekcji i bez konwekcji.

2. Model mechaniczny

Proces wydłużania tulei charakteryzuje się przestrzennym stanem odkształcenia. Stosując współrzędne cylindryczne i zaniehbując zmiany pola prędkości w kierunku obwodowym tulei, można przeprowadzić analizę stanu odkształcenia w płaszczyźnie r - z , w sposób przedstawiony na rysunku 1. Uproszczenie to zdecydowanie skraca czas obliczeń numerycznych. Rozważa się proces odkształcenia na gorąco materiału izotropowego o objętości kontrolnej V . Zakłada się, że odkształcenie materiału jest osiowoosymetryczne.



Rysunek 1. Schemat procesu wydłużania tulei.

Tarcie τ_s na powierzchni styku materiału z odkształcanym narzędziem S modelowano stosując równanie

$$\tau_s = \frac{1}{\sqrt{3}} m \sigma_p \quad (1)$$

gdzie m jest czynnikiem tarcia a τ_p reprezentuje naprężenie uplastyczniające. Założono, że naprężenie uplastyczniające jest funkcją temperatury, odkształcenia i prędkości odkształcenia. Warunki brzegowe na powierzchni styku tulei z walcem i trzcieniem wprowadzono przyjmując zerową prędkość normalną do powierzchni narzędzia S

$$v_n = 0 \quad (2)$$

Przez v_n oznaczono prędkością normalną do powierzchni narzędzia. W modelu materiału pomija się sprężyste odciażenie i przyjmuje się, że wszelkie odkształcenia mają charakter trwałe. Umożliwia to przyjęcie w objętości kontrolnej V intensywności naprężeń $\bar{\sigma}$ równej naprężeniu uplastyczniającemu

$$\bar{\sigma} = \sigma_p \quad (3)$$

W rezultacie zagadnienie sprowadzono do minimalizacji funkcjonału mocy względem pola prędkości v_r , które spełnia warunki brzegowe procesu. Wartości węzłowe pola prędkości wyliczono minimalizując funkcjonał mocy

$$\Pi(v_i) = \int_V \left[\bar{\sigma} \dot{\epsilon} + \frac{\Delta\tau}{2} \frac{H'}{H} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} \right)^2 \right] dV + \int_V \frac{E\Delta\tau}{6(1-2\nu)} (d_{kk})^2 dV + \int_S \tau_s \| \Delta v \| dS \quad (4)$$

gdzie:

E – Moduł Younga,

H' – moduł sprężysto-plastyczny

$\dot{\epsilon}$ – intensywność prędkości odkształcenia

$\Delta\tau$ – przyrost czasu;

ν – współczynnik Poissona;

d_{kk} – aksjator tensora prędkości deformacji;

$\|v\|$ – nieciągłość prędkości normalnej na powierzchni S .

Pierwsza całka w funkcjonału mocy reprezentuje moc dewiatora naprężenia, druga całka wyraża moc sprężystej zmiany objętości i pełni rolę warunku nieściśliwości. Założono, że w odkształcanym materiale zmiana objętości jest dopuszczalna w zakresie odkształceń sprężystych ale ma skutek nieodwracalny. Trzecia całka wprowadza moc tarcia na powierzchni styku odkształcanego materiału z narzędziami. Wyprowadzenie funkcjonału mocy (4) podano w pracach Malinowskiego i Lenarda (1993) oraz Malinowskiego (1994).

Współczynnik Poissona zdefiniowano w postaci funkcji

$$\bar{\nu} = \nu \text{ dla } \bar{\sigma} \leq \sigma_1$$

$$\bar{\nu} = \nu_{\max} - (\nu_{\max} - \nu) \exp \left[1 - \gamma \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1} \right] \text{ dla } \bar{\sigma} > \sigma_1 \quad (5)$$

gdzie:

ν_{\max} – maksymalna wartość współczynnika Poissona,

ν – minimalna wartość współczynnika Poissona,

γ – parametr skalujący

σ_1 – minimalna wartość naprężenia uplastyczniającego.

Procesu wydłużania tulei charakteryzują się skomplikowanym układem warunków brzegowych nakładanych na pole prędkości. W celu ich uproszczenia założono, że narzędzia są sztywne. W rezultacie odkształcany materiał ślizga się po powierzchni sztywnej. Umożliwia to wprowadzenie prędkości stycznej do powierzchni narzędzia w węzłach elementów stykających się z narzędziami. Wypełnienie tego warunku osiągnięto eliminując w węzle jedną składową pola prędkości

$$v_r = v_z \frac{df_z(z)}{dz} \quad (6)$$

$$v_r = v_z \frac{df_w(z)}{dz} \quad (7)$$

Funkcja f_z opisuje zewnętrzną, a funkcja f_w wewnętrzną, powierzchnię tulei. Wartości funkcji obliczono stosując liniową interpolację położenia węzłów elementów siatki Lagrangea leżących na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej tulei. Kształt tulei po odkształceniu nie jest początkowo dokładnie określony. W związku z tym stosowano procedurę iteracyjną poprawiania kształtu tulei, odkształceń, naprężenia uplastyczniającego i temperatury, w celu uzyskania procesu stacjonarnego. W kolejnych iteracjach korektę dokonywano w oparciu o rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r(r,z) \\ \frac{d\theta}{dt} &= v_\theta(r,z) \\ \frac{dz}{dt} &= v_z(r,z) \\ \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} &= \dot{\bar{\epsilon}}(r,z) = \left(\frac{2}{3} d_{ij} d_{ij} \right)^{0,5} \end{aligned} \quad (8)$$

Do rozwiązania układu równań różniczkowych stosowano metodę Rungego-Kutty. W wyniku rozwiązania układu równań uzyskuje się nowe współrzędne węzłów elementów Lagrangea oraz intensywność odkształcenia w węzłach elementów. W początkowych iteracjach na ogół nie uzyskuje się stacjonarnego przebiegu procesu. Powoduje to, że wyznaczony nowy kształt tulei może być błędny. Problem ten nie występuje w rozwiązaniach niestacjonarnych, gdzie istnieje możliwość doboru kroku całkowania tak aby nie doprowadzić do powstawania istotnych błędów w określaniu przemieszczeń węzłów. W przypadku rozwiązań stacjonarnych rolę długości kroku całkowania może spełnić gęstość siatki elementów w kierunku z (długość strefy odkształcenia). Całkowanie równań (8) wykonywane jest wtedy między kolejnymi pionowymi liniami siatki elementów. Dalszą stabilizację całkowania uzyskuje się przez zastosowanie do współrzędnej promieniowej r schematu

$$r = (1 - \beta) r^{k-1} + \beta r^k \quad (9)$$

gdzie k jest numerem iteracji a β jest współczynnikiem z zakresu od 0 do 1. Współrzędna promieniowa węzłów jest poprawiana jedynie o pewną część przemieszczenia wyznaczonego z rozwiązania układu równań płynięcia. Testy numeryczne wykazały, że dobre rezultaty osiąga się w przypadku gdy $\beta = 0,75$. Zastosowany w modelu mechanicznym tensor prędkości deformacji związany jest z polem prędkości równaniami

$$\begin{aligned} d_{rz} &= \frac{\partial v_r(r,z)}{\partial r}; \\ d_{\theta\theta} &= \frac{v_r(r,z)}{r}; \\ d_{zz} &= \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial z} \\ d_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial r} - \frac{v_\theta(r,z)}{r} \right) \\ d_{\theta z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v_\theta(r,z)}{\partial z} \\ d_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial v_r(r,z)}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

W modelu płynięcia plastycznego uwzględniono skręcanie ścianki tulei, przez wprowadzenie w węzłach elementów trzeciej składowej pola prędkości – prędkość obwodową v_θ . W rezultacie uzyskano pełny trójwymiarowy opis stanu odkształcenia. Uproszczenie jakie występuje w stosunku do rzeczywistego przebiegu procesu wynika z zaniedbania zmian prędkości v_θ w kierunku obwodowym.

2.1. Aproksymacja pola prędkości

Pole prędkości jest aproksymowane dziewięciowęzłowymi elementami Eulera. Siatka elementów Eulera jest generowana po każdej iteracji. Stosowana jest procedura odnawiania siatki oparta na transformacji objętości kontrolnej. Objętość kontrolna jest przekształcana w kwadrat o znormalizowanym boku równym jeden (Malinowski i Szyndler, 1987). Współrzędne znormalizowane u_1, u_2 są związane ze współrzędnymi globalnymi r, z równaniami

$$u_1 = \frac{r - f_w(u_2)}{f_z(u_2) - f_w(u_2)} \quad (11)$$

$$u_2 = \frac{z - Z_1}{Z_2 - Z_1} \quad (12)$$

Stałe Z_1, Z_2 określają początek i koniec strefy odkształcenia, w przyjętym układzie współrzędnych. Znormalizowany obszar jest następnie dzielony na elementy prostokątne. Następnie współrzędne węzłów elementów u_1, u_2 są transformowane do układu współrzędnych Eulera

$$\zeta_1 = \frac{u_1 - u_1^i}{u_1^{i+1} - u_1^i} \quad (13)$$

$$\zeta_2 = \frac{u_2 - u_2^j}{u_2^{j+1} - u_2^j} \quad (14)$$



Wskaźniki i, j oznaczają numer elementu, odpowiednio w kierunku r i z . Pole prędkości w obszarze elementu Eulera jest interpolowane funkcjami kształtu

$$v_z(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 P_{2k} P_{1l} v_z^{kl} \quad (15)$$

$$v_r(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 P_{2k} P_{1l} v_r^{kl} \quad (16)$$

$$v_\theta(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 P_{2k} P_{1l} v_\theta^{kl} \quad (17)$$

Paraboliczne funkcje kształtu mają postać

$$\begin{aligned} P_{i1} &= 1 - 3\zeta_i + 2\zeta_i^2 \\ P_{i2} &= 4\zeta_i - 4\zeta_i^2 \\ P_{i3} &= 2\zeta_i^2 - \zeta_i \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (18)$$

Opracowana metoda aproksymacji pola prędkości umożliwia odnawianie siatki elementów po każdej iteracji. Siatka Lagrangea jest niezależna od siatki Eulera. Umożliwia to dobranie gęstości siatek odpowiednich do opisu geometrii tulei i aproksymacji pola prędkości.

Naprężenie uplastyczniające jest funkcją temperatury i wymiana ciepła odgrywa znaczącą rolę w modelowaniu procesów odkształcenia na gorąco. Naprężenie uplastyczniające jako funkcję temperatury, odkształcenia i prędkości odkształcenia można wyznaczyć na podstawie wyników badań plastometrycznych. W literaturze dostępne są równania dla wielu gatunków stali. W przypadku stali węglowych można stosować wzory Shidy (1974):

$$\sigma_p = \sigma_o \left(1,3(5\bar{\epsilon})^{0,41} - 0,07 C - 1,5\bar{\epsilon} \right) \left(\frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{10} \right)^n \quad (19)$$

Współczynniki n i λ_o dla

$$\frac{T-273}{1000} = \bar{T} \geq 0,95 \quad \frac{C+0,41}{C+0,32} \quad (20)$$

mają postać:

$$\sigma_o = 2,75 \exp \left(\frac{5}{\bar{T}} - \frac{0,01}{C+0,05} \right) \quad (21)$$

$$n = (-0,019 C + 0,126) \bar{T} + (0,075 C - 0,05) \quad (22)$$

W przypadkach gdy

$$\frac{T-273}{1000} = \bar{T} < 0,95 \quad \frac{C+0,41}{C+0,32} \quad (23)$$

współczynniki n i σ_o mają postać

$$\sigma_o = 2,75 \left[30(C+0,9) \left(\bar{T} - 0,95 \frac{C+0,49}{C+0,42} \right)^2 + \frac{C+0,06}{C+0,09} \right] \exp \left(\frac{C+0,32}{0,19(C+0,41)} - \frac{0,01}{C+0,05} \right) \quad (24)$$

$$n = (0,081 C - 0,154) \bar{T} - 0,019 C + 0,207 + \frac{0,027}{C+0,32} \quad (25)$$

Przez C oznaczono zawartość węgla w stali w % a T jest temperaturą bezwzględną. W przypadku stali austenitycznych naprężenie uplastyczniające można wyznaczyć ze wzoru (Malinowski i in., 1996)

$$\sigma_p = 1256,5 \exp[-0,0020257 (T-273)] \bar{\epsilon}^{0,0010463} \exp[0,0674012 \bar{\epsilon}] \bar{\epsilon}^{0,03120288} \quad (26)$$

3. Model wymiany ciepła

W przyjętym układzie współrzędnych cylindrycznych, pole temperatury tulei będącej w ruchu można określić z rozwiązania równania przewodzenia ciepła

$$\lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} + \frac{\partial T^2}{\partial \theta^2} \right] + q_v = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (27)$$

przy warunkach brzegowych oraz warunku początkowym w płaszczyźnie wejścia do objętości kontrolnej. Na powierzchni styku materiału z narzędziem warunki brzegowy określono gęstością strumienia ciepła

$$q_1 = \alpha_p (T - T_a) + \frac{1}{2} \int_S \tau_s \|\Delta v\| dS \quad (28)$$

W tym przypadku współczynnik wymiany ciepła określono z równań

$$\alpha_p = 20438 - 5936 \frac{T_w - 273}{1000} + 16943 \left(\frac{T_w - 273}{1000} \right)^2 \quad (29)$$

dla $T_w < 973K$

$$\alpha_p = 115566 - 190554 \frac{T_w - 273}{1000} + 85068 \left(\frac{T_w - 273}{1000} \right)^2 \quad (30)$$

dla $T_w > 973K$

Na zewnętrznej powierzchni swobodnej tulei ma miejsce wymiana ciepła z otaczającym powietrzem, gdzie warunek brzegowy określono gęstością strumienia ciepła

$$q_2 = \alpha_r (T - T_a) \quad (31)$$

Współczynnik radiacyjnej wymiany ciepła określono z równania

$$\alpha_r = \left(1,2 - 0,52 \frac{T - 273}{1000}\right) \cdot 5,6693 \cdot 10^{-8} \frac{T^4 - T_a^4}{T - T_a} \quad (32)$$

Warunek początkowy w płaszczyźnie wejścia do objętości kontrolnej przyjęto w postaci znanego rozkładu temperatury

$$T(r) = T_o(r) \quad (33)$$

W równaniu przewodzenia ciepła λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, ρ reprezentuje gęstość, c_p ciepło właściwe, α współczynnik wymiany ciepła, T_a temperaturę otoczenia lub temperaturę powierzchni narzędzia, T_o określa początkową temperaturę odkształcanego materiału. Gęstość wewnętrznego źródła ciepła q_v związanego z odkształceniem plastycznym wyznaczono z równia (Zehnder, 1991)

$$q_v = \sigma \dot{\epsilon} \left(1 - \frac{c H'}{E}\right) \quad (34)$$

gdzie c jest parametrem zależnym od materiału. W przypadku stali $c = 20$. W równaniu przewodzenia ciepła występuje człon konwekcyjny uwzględniający ruch ośrodka dla którego wyznaczane jest pole temperatury. W przypadku procesu wydłużania tulei możliwe jest zastosowanie rozwiązania stacjonarnego do równania przewodzenia ciepła. Rozwiązanie takie powinno dać wynik identyczny jak rozwiązanie niestacjonarne. Zarówno w przypadku rozwiązań stacjonarnych jak i niestacjonarnych można zastosować kilka schematów numerycznych. W pracy testom numerycznym poddano cztery schematy: dwa stacjonarne i dwa niestacjonarne. Model wymiany ciepła dyskretyzowano w sposób typowy dla metody elementów skończonych. Zgodnie z przyjętym w modelu mechanicznym uproszczeniem polegającym na zaniedbaniu zmian pola prędkości w kierunku obwodowym, w modelu wymiany ciepła pominięto również przewodzenie ciepła w kierunku obwodowym. Zastosowanie metody reszt ważonych Galerkiną do równania przewodzenia ciepła prowadzi do układu równań różniczkowych

$$K_{ij}(\tau) T_j(\tau) + C_{ij}(\tau) \dot{T}_j(\tau) = G_i(\tau) \quad (35)$$

Pochodna substancjalna temperatury, dla ośrodka będącego w ruchu, ma postać

$$\dot{T}_j(\tau) = \frac{\partial T_j}{\partial \tau} + \left(v_r^j \frac{\partial T_j}{\partial r} + v_z^j \frac{\partial T_j}{\partial z} + v_\theta^j \frac{\partial T_j}{\partial \theta} \right) \quad (36)$$

Zakładając liniową zmianę temperatury w czasie $\Delta\tau$

$$T(\beta) = (1 - \beta) T(\tau_o) + \beta T(\tau_o + \Delta\tau) \quad (37)$$

gdzie

$$\beta = \frac{\tau - \tau_o}{\Delta\tau}; \quad \tau \in [\tau_o, \tau_o + \Delta\tau] \quad (38)$$

Wykorzystując nową zmienną β otrzymujemy wzór na pochodną cząstkową temperatury

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{T(\tau_o + \Delta\tau) - T(\tau_o)}{\Delta\tau} \quad (39)$$

Podstawiając wyrażenia (36), (37), (39) do równania (35) otrzymujemy ogólny schemat numeryczny rozwiązywania równania przewodzenia ciepła

$$\begin{aligned} [C_{ij} + \beta \Delta\tau (K_{ij} + W_{ij})] T_j(\tau_o + \Delta\tau) = \\ [C_{ij} - \Delta\tau (1 - \beta)(K_{ij} + W_{ij})] T_j(\tau_o) + \\ \Delta\tau [(1 - \beta) G_i(\tau_o) + \beta G_i(\tau_o + \Delta\tau)] \end{aligned} \quad (40)$$

Wybierając wartość zmiennej β z przedziału $[0,1]$ otrzymujemy różne schematy numeryczne. Do najczęściej stosowanych należą schematy: Eulera $\beta = 0$, Cranka-Nicolsona $\beta = 1/2$, Galerkiną $\beta = 2/3$.

3.1. Model niestacjonarny z konwekcją

Stosując schemat Galerkiną do równania (37), oraz pomijając zależność w czasie $\Delta\tau$ macierzy K_{ij} oraz C_{ij} od temperatury, otrzymujemy

$$A_{ij}(\tau_o) T_j(\tau_o + \Delta\tau) = B_i(\tau) \quad (41)$$

gdzie

$$A_{ij}(\tau_o) = \frac{1}{3} [W_{ij}(\tau_o) + K_{ij}(\tau_o)] + \frac{1}{2\Delta\tau} C_{ij}(\tau_o) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} B_i(\tau) = \left[-\frac{1}{6} (W_{ij}(\tau_o) + K_{ij}(\tau_o)) + \frac{1}{2\Delta\tau} C_{ij}(\tau_o) \right] \\ T_i(\tau_o) + \frac{1}{6} G_i(\tau_o) + \frac{1}{3} G_i(\tau_o + \Delta\tau) \end{aligned} \quad (43)$$

Dla jednego elementu macierze C_{ij} , K_{ij} , W_{ij} oraz wektor G_i mają postać

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^4 N_i N_j \rho^k c_p^k D_v^k r^k \quad (44)$$

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^4 \rho^k c_p^k \left(v_r^k N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} + v_z^k N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) D_v^k r^k \quad (45)$$

$$\begin{aligned} K_{ij} = \sum_{k=1}^4 \lambda^k \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) D_v^k r^k + \\ \sum_{s=1}^4 L^s \sum_{k=1}^2 N_i N_j \alpha^k D_f^k r^k \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} G_i = \sum_{s=1}^4 L^s \sum_{k=1}^2 N_i (\alpha^k T_a^k - q^k) D_f^k r^k + \\ \sum_{k=1}^4 N_i q_v^k D_f^k r^k \end{aligned} \quad (47)$$



gdzie L^s jest stałą równą 1 dla boku elementu na którym zadawane są warunki brzegowe, w przeciwnym przypadku $L^s = 0$. Indeks s wskazuje numer boku elementu a indeks k numer punktu Gaussa. Dyskretyzacja pola temperatury i kształtu materiału jest wykonana we współrzędnych cylindrycznych w płaszczyźnie r - z . Przekrój wzdłużny jest dzielony na 4-węzłowe elementy Lagrangea. Typową siatkę elementów Lagrangea w płaszczyźnie r - z przedstawiono na rysunku 1. Współrzędne globalne r , z są związane ze współrzędnymi lokalnymi ξ_1 , ξ_2 równaniami

$$r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 N_i r_i \quad (48)$$

$$z(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 N_i z_i \quad (49)$$

Pole temperatury w obszarze elementu jest interpolowane na podstawie wartości temperatury w węzłach elementów

$$T(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 N_i T_i \quad (50)$$

Liniowe funkcje kształtu N_i dla elementu 4-węzłowego mają postać

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_{1i} \xi_1)(1 + \xi_{2i} \xi_2) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (51)$$

Pochodne funkcji kształtu względem współrzędnych globalnych wyznaczano z równań

$$\frac{\partial N_k}{\partial r} = J^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \quad (52)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial z} = J^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2}$$

Wyznacznik macierzy przekształcenia współrzędnych globalnych do współrzędnych lokalnych elementu ma postać

$$D_v = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi_1} & \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

W przypadku boku elementu jacobian przekształcenia obliczano ze wzoru

$$D_f = \frac{\partial l}{\partial \xi_1} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} l^k \quad (54)$$

Macierz odwrotna przyjmuje postać

$$J_{ki}^{-1} = \frac{1}{D_v} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial r}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Pochodne współrzędnych globalnych względem współrzędnych lokalnych wyznaczano ze wzorów

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \xi_1^k (1 + \xi_2 \xi_2^k) r^k$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \xi_2^k (1 + \xi_1 \xi_1^k) r^k \quad (56)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \xi_1^k (1 + \xi_2 \xi_2^k) z^k$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \xi_2^k (1 + \xi_1 \xi_1^k) z^k \quad (57)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \xi_1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \xi_1^k l^k \quad (58)$$

Współrzędne lokalne oznaczono przez ξ_r^k , natomiast współrzędne globalne elementu przez r^k , z^k , natomiast l oznacza długość boku elementu.

3.2. Model niestacjonarny dla ciała nieruchomego

Typowe rozwiązanie niestacjonarne uzyskuje się w przypadkach gdy prędkość ruchu ośrodka jest niewielka. Wówczas pominięcie macierzy W_{ij} nie wprowadza istotnych błędów w schemacie numerycznym. W tym przypadku otrzymujemy macierz A_{ij} oraz wektor B_i w postaci

$$A_{ij}(\tau_o) = \frac{1}{3} [K_{ij}(\tau_o)] + \frac{1}{2\Delta\tau} C_{ij}(\tau_o) \quad (59)$$

$$B_i(\tau) = \left[-\frac{1}{6} (K_{ij}(\tau_o)) + \frac{1}{2\Delta\tau} C_{ij}(\tau_o) \right] T_i(\tau_o) + \frac{1}{6} G_i(\tau_o) + \frac{1}{3} G_i(\tau_o + \Delta\tau) \quad (60)$$

3.3. Modele stacjonarne

W przypadku stacjonarnego pola temperatury pochodna

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (61)$$

przyjmuje wartość zero i schemat numeryczny ulega znacznemu uproszczeniu, przyjmując postać

$$(K_{ij} + W_{ij})T_j = G_i \quad (62)$$

Macierze K_{ij} , W_{ij} oraz wektor G_i określone są wzorami (45,46,47). W rozwiązaniach stacjonarnych pojawia się jednak problem stabilności uzyskiwanych rozwiązań w przypadkach gdy człon konwekcyjny określony macierzą W_{ij} osiąga dużą wartość. Przypadek taki został szeroko opisany w pracy Heinricha i in. (1977). W celu wyeliminowania rozwiązań niestabilnych, w rozwiązaniach stacjonarnych stosowane są niesymetryczne funkcje wagi. Podejście takie daje na ogół zadowalające rezultaty. Możliwe jest zbudowanie różnych schematów numerycznych przez wybór funkcji kształtu i funkcji wagi. Testom numerycznym poddano dwa schematy oparte na różnych funkcjach wagi i funkcjach kształtu.

Model I oparto na 4-węzłowych funkcjach kształtu (51). W macierzy W_{ij} w miejsce funkcji kształtu wprowadza się niesymetryczne funkcje wagi, które opracowano na podstawie pracy Heinricha i in. (1977). Funkcje te mają postać

$$U_i = \left[(1 + \xi_{1i}\xi_1)/2 + W1 \right] \left[(1 + \xi_{2i}\xi_2)/2 + W2 \right] \quad (63)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

gdzie

$$W1 = \frac{3}{4} \frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \left[\frac{e^{\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)} + e^{-\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)}}{e^{\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)} - e^{-\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \right] \quad (64)$$

$$\left[(1 + \xi_{1i}\xi_1) \right] \left[(1 - \xi_{1i}\xi_1) \right]$$

$$W2 = \frac{3}{4} \frac{v_z}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \left[\frac{e^{\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)} + e^{-\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)}}{e^{\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)} - e^{-\left(\frac{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{2}\right)}} - \frac{1}{\sqrt{D_v} \sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \right] \quad (65)$$

$$\left[(1 + \xi_{2i}\xi_2) \right] \left[(1 - \xi_{2i}\xi_2) \right]$$

W rezultacie macierz W_{ij} przyjmuje postać

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^4 \rho^k c_p^k \left(v_r^k U_i \frac{\partial N_j}{\partial r} + v_z^k U_i \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) D_v^k r^k \quad (66)$$

Model II (Pietrzyk i Lenard, 1991) oparto na 12-węzłowych funkcjach kształtu

$$N_i = \frac{1}{32} \left\{ (1 + \xi_{1i}\xi_1)(1 + \xi_{2i}\xi_2) \left[9(\xi_{1i}\xi_1)^2 + 9(\xi_{2i}\xi_2)^2 - 10 \right] \right\} \quad (67)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_i = \frac{9}{32} \left\{ (1 + \xi_{1i}\xi_1)(1 - \xi_{2i}\xi_2)(1 + 9\xi_{2i}\xi_2) \right\} \quad (68)$$

$$i = 5, 6, 7, 8$$

$$N_i = \frac{9}{32} \left\{ (1 + \xi_{2i}\xi_2)(1 - \xi_{1i}\xi_1)(1 + 9\xi_{1i}\xi_1) \right\} \quad (69)$$

$$i = 9, 10, 11, 12$$

W macierzy W_{ij} w miejsce funkcji kształtu wprowadza się niesymetryczne funkcje wagi

$$U_i = N_i + \frac{\sqrt{D_v}}{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}} \left(v_r \frac{\partial N_i}{\partial r} + v_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \quad (70)$$

w rezultacie macierz W_{ij} przyjmuje postać

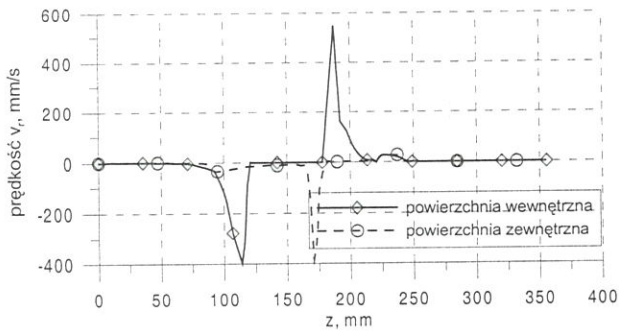
$$W_{ij} = \sum_{k=1}^4 \rho^k c_p^k \left(v_r^k U_i \frac{\partial N_j}{\partial r} + v_z^k U_i \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) D_v^k r^k \quad (71)$$

4. OBLICZENIA NUMERYCZNE

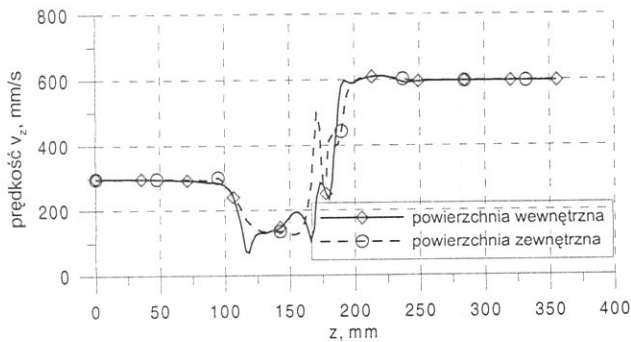
Obliczenia pola temperatury wykonano dla dwóch przypadków wydłużania tulei różniących się stopniem wydłużenia.

W pierwszym przypadku wydłużano tuleję (oznaczoną jako tuleja I) ze wsadu o wymiarach: średnica zewnętrzna 101,6 mm, średnicy otworu 65,1 mm, temperatura powierzchni zewnętrznej 1040°C, temperatura powierzchni wewnętrznej 1093°C. Wymiary tulei po wydłużaniu wynosiły: średnica zewnętrzna 78,8 mm, średnica wewnętrzna 55,7 mm. Modelowano wydłużanie w walcierce skośnej trójwalcowej o prędkości obrotowej walców 160 obr/min. Maksymalna średnica walców wynosiła 418,5 mm. Tuleję wydłużano na trzpieniu stałym o średnicy 54 mm. Minimalna odległość między walcami wynosiła 77 mm. Wydłużano stal węglową o zawartości węgla 0,3%. Naprężenie uplastyczniające wyznaczone ze wzoru Shidy. Współczynnik wydłużenia, liczony jako stosunek przekroju poprzecznego tulei wsadowej do przekroju poprzecznego tulei po wydłużaniu, wynosił 1.96. Uzyskany w wyniku obliczeń metodą elementów skończonych kształt tulei przedstawiono na rysunku 1. W obliczeniach pola temperatury zastosowano 150 elementów 4-węzłowych w kierunku długości strefy odkształcenia i 33 elementy w kierunku grubości ścianki tulei. Pole prędkości aproksymowano stosując 40 elementów parabolicznych w kierunku długości tulei i 5 elementów w kierunku grubości ścianki tulei. Wyniki obliczeń pola prędkości przedstawiono na rysunkach 2, 3 i 4.

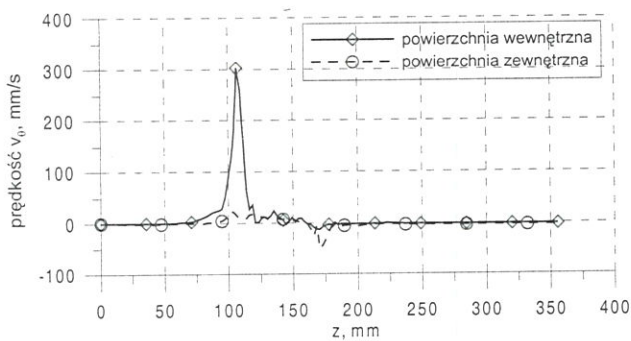
Składowa promieniowa pola prędkości osiąga na powierzchni zewnętrznej maksymalną wartość około



Rysunek 2. Przebieg zmian prędkości promieniowej w procesie wydłużania tulei I.



Rysunek 3. Przebieg zmian prędkości osiowej w procesie wydłużania tulei I.



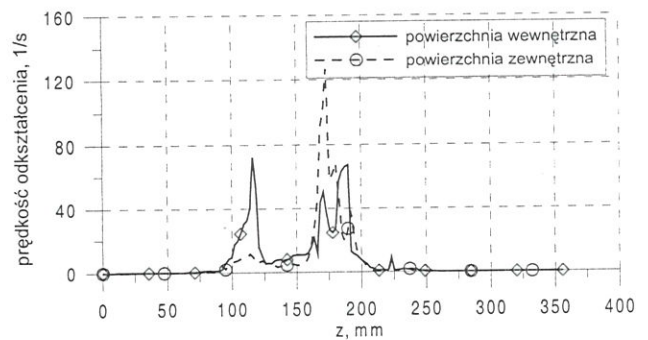
Rysunek 4. Przebieg zmian przyrostu prędkości obwodowej w procesie wydłużania tulei I.

390 mm/s. Na powierzchni wewnętrznej wartości ekstremalne wynoszą -400 mm/s i 550 mm/s. Ekstremalne wartości składowej promieniowej na powierzchni wewnętrznej występują w punktach nawiązania bądź utraty styku z trzpieniem.

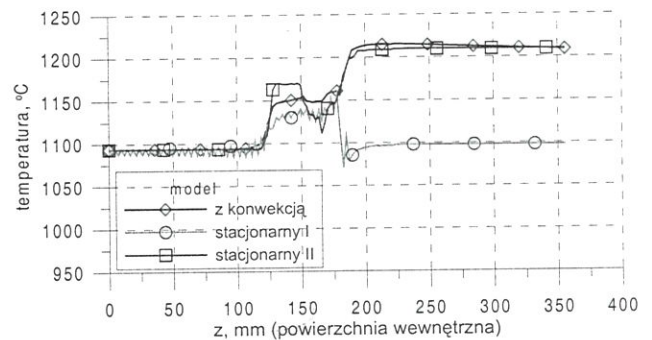
Składowa osiowa v_z na powierzchni zewnętrznej przyjmuje wartości z zakresu od 130 do 604 mm/s. Podobne zmiany występują na powierzchni wewnętrznej i wynoszą od 70 do 610 mm/s. Przyrosty prędkości obwodowej, wyznaczone w stosunku do prędkości początkowej w płaszczyźnie wejścia, osiągają na powierzchni zewnętrznej maksymalną wartość 24 mm/s, a na powierzchni wewnętrznej 300 mm/s. Prędkość obwodowa nie wpływa na obliczenia pola temperatury, ze względu na brak jej zmian w kierunku obwodowym. Gradienty prędkości obwodowej, w kierunkach r i z , mają jednak wpływ na ciepło od-

kształcenia plastycznego. Natomiast gradienty składowych pola prędkości: promieniowej v_r i osiowej v_z wpływają zarówno na konwekcyjną wymianę ciepła jak i na ciepło odkształcenia plastycznego. Gęstość wewnętrznego źródła ciepła, którym jest ciepło odkształcenia plastycznego rozpraszane w objętości kontrolnej, określano ze wzoru (34). Jednym z czynników wpływających na gęstość wewnętrznego źródła ciepła jest intensywność prędkości odkształcenia, przedstawiona na rysunku 5. Prędkość odkształcenia osiąga maksymalne wartości wynoszące około 126 s^{-1} na powierzchni zewnętrznej i 72 s^{-1} na powierzchni wewnętrznej. W procesach przeróbki plastycznej wartości tego rzędu uznaje się za wysokie.

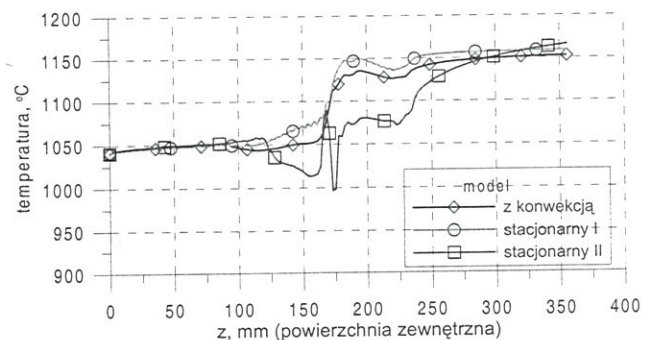
Wyniki obliczeń, trzema modelami, pola tempe-



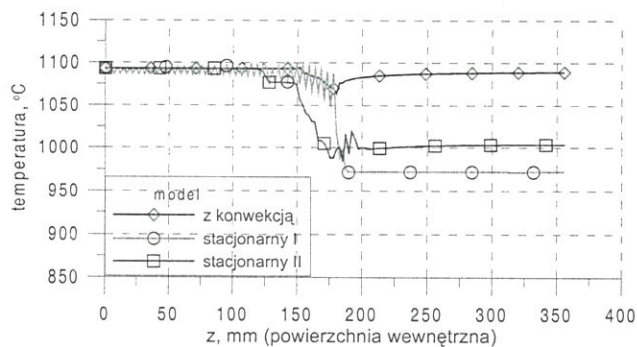
Rysunek 5. Przebieg zmian intensywności prędkości odkształcenia w procesie wydłużania tulei I.



Rysunek 6. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone testowanymi modelami, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei I.

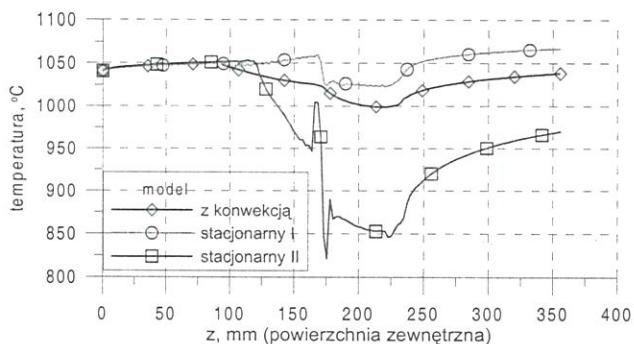


Rysunek 7. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone testowanymi modelami, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei I.



Rysunek 8. Przebiegi zmian temperatury, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei I. Wyznaczone testowanymi modelami z pominięciem źródła ciepła i ciepła tarcia.

ratury w procesie wydłużania tulei I przedstawiono na rysunkach 6 i 7. Model niestacjonarny z konwekcją, który należy uznać za najbardziej dokładny, daje wyniki bliskie do uzyskanych modelem stacjonarnym I na powierzchni zewnętrznej oraz bliskie do uzyskanych modelem stacjonarnym II na powierzchni wewnętrznej. Wprowadzone w modelach stacjonarnych niesymetryczne funkcje wagi stabilizują zatem rozwiązanie, nie udaje się jednak uzyskać stabilizacji w całym zakresie pola prędkości. Ponadto, model stacjonarny I wykazuje w niektórych przypadkach widoczne oscylacje rozwiązania w zakresie około 10°C. Wysokie gradienty pola prędkości występujące w okolicy garbu walca, widocznego na rysunku 1., powodują destabilizację modeli stacjonarnych.



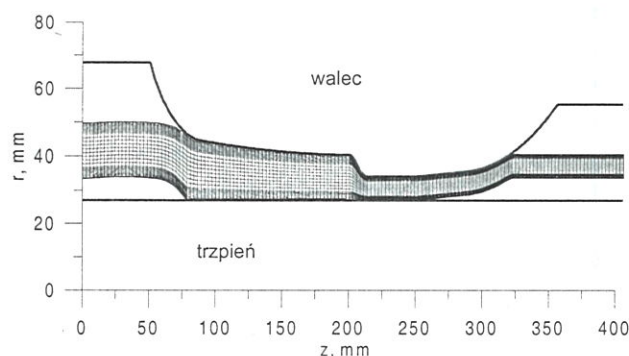
Rysunek 9. Przebiegi zmian temperatury, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei I. Wyznaczone testowanymi modelami z pominięciem źródła ciepła i ciepła tarcia.

Wyniki obliczeń pola temperatury z pominięciem ciepła odkształcenia plastycznego oraz ciepła tarcia na powierzchni styku materiału z narzędziami przedstawiono na rysunkach 8 i 9. Test ten pozwolił na wyeliminowanie oddziaływania modelu mechanicznego na model wymiany ciepła w kolejnych iteracjach. Pominięcie w obliczeniach ciepła odkształcenia plastycznego oraz ciepła tarcia na powierzchni styku materiału z narzędziami nie spowodowało uzyskania zadowalających wyników modelami stacjonarnymi. Wyniki obliczeń wskazują, że zastosowane schematy

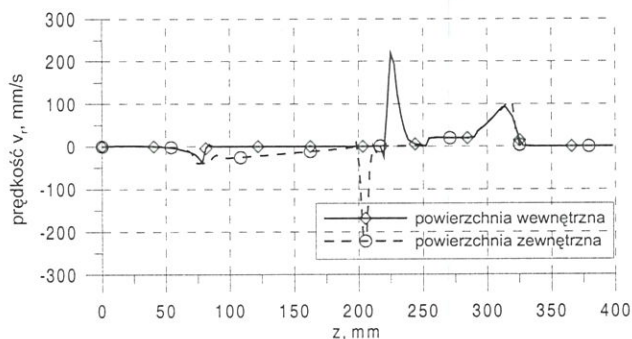
numeryczne stabilizacji rozwiązań stacjonarnych nie cechują się niezawodnością. Powodem są zbyt duże gradienty pola prędkości występujące w testowanym procesie wydłużania tulei I.

W drugim teście obliczenia przeprowadzono dla wydłużania tulei (oznaczonej jako tuleja II) ze wsadu o wymiarach: średnica zewnętrzna 99 mm, średnicy otworu 66,8 mm, temperatura powierzchni zewnętrznej 859°C, temperatura powierzchni wewnętrznej 888°C. Wymiary tulei po wydłużaniu wynosiły: średnica zewnętrzna 81,6 mm, średnica wewnętrzna 67,3 mm. Modelowano wydłużanie w walcu skośnej trójwalcowej o prędkości obrotowej walców 160 obr/min. Maksymalna średnica walców wynosiła 418,5 mm. Tuleję wydłużano na trzpieniu stałym o średnicy 54 mm. Minimalna odległość między walcami wynosiła 68,3 mm. Wydłużano stal węglową o zawartości węgla 0,3%. Naprężenie uplastyczniające wyznaczone ze wzoru Shidy. Współczynnik wydłużenia, liczony jako stosunek przekroju poprzecznego tulei wsadowej do przekroju poprzecznego tulei po wydłużeniu, wyniósł 2,5. Uzyskany w wyniku obliczeń metodą elementów skończonych kształt tulei przedstawiono na rysunku 10. W obliczeniach pola temperatury zastosowano 150 elementów 4-węzłowych w kierunku długości strefy odkształcenia i 33 elementy w kierunku grubości ścianki tulei. Pole prędkości aproksymowano stosując 40 elementów parabolicznych w kierunku długości tulei i 5 elementów w kierunku grubości ścianki tulei. Wyniki obliczeń pola prędkości przedstawiono na rysunkach 11, 12 i 13. Wybrany przypadek leży na granicy możliwych do osiągnięcia maksymalnych stopni wydłużenia. Składowa promieniowa pola prędkości osiąga na powierzchni zewnętrznej maksymalną wartość około -210 mm/s. Na powierzchni wewnętrznej wartości ekstremalne wynoszą -40 mm/s i 250 mm/s. Ekstremalne wartości składowej promieniowej nie różnią się zasadniczo od wyników uzyskanych dla wydłużania tulei I.

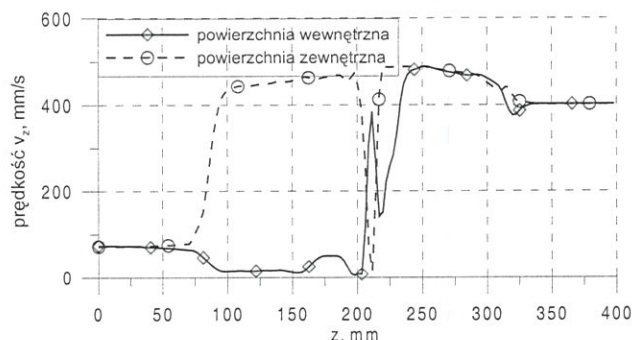
Składowa osiowa v_z na powierzchni zewnętrznej przyjmuje wartości z zakresu od 15 do 490 mm/s. Podobne zmiany występują na powierzchni wewnętrznej



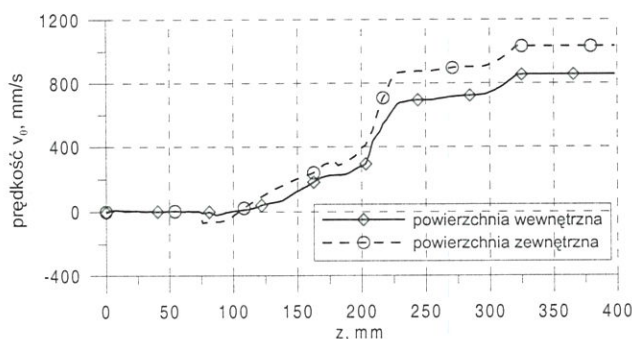
Rysunek 10. Siatka elementów oraz kształt wydłużanej tulei II.



Rysunek 11. Przebieg zmian prędkości promieniowej w procesie wydłużania tulei II.



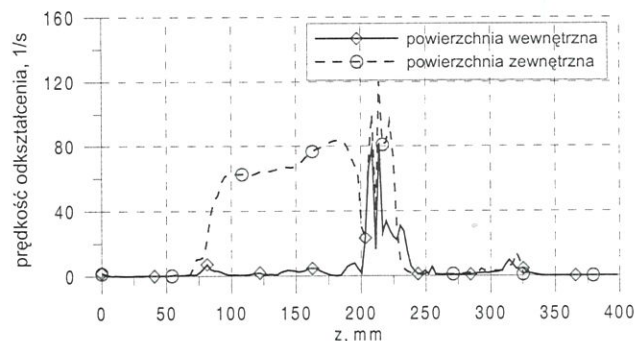
Rysunek 12. Przebieg zmian prędkości osiowej v_z w procesie wydłużania tulei II.



Rysunek 13. Przebieg zmian przyrostu prędkości obwodowej w procesie wydłużania tulei II.

nej. Przyrosty prędkości obwodowej, wyznaczone w stosunku do prędkości początkowej w płaszczyźnie wejścia, osiągają na powierzchni zewnętrznej maksymalną wartość 1030 mm/s, a na powierzchni wewnętrznej 850 mm/s. Wydłużanie tulei II, w porównaniu do tulei I przebiega przy większych gradientach składowej osiowej i obwodowej pola prędkości. Przedstawiony na rysunku 14 rozkład intensywności prędkości odkształcenia cechuje się szerokim zakresem wysokich wartości intensywności prędkości odkształcenia, osiających maksymalnie 122 s⁻¹.

Wyniki obliczeń pola temperatury dla wydłużania tulei II przedstawiono na rysunkach 15 i 16. Podobnie jak w przypadku wydłużania tulei I modele stacjonarne dały wyniki różne od rozwiązania niestacjonarnego z uwzględnieniem ruchu tulei. Wyniki tego modelu oznaczono jako model z konwekcją. Model

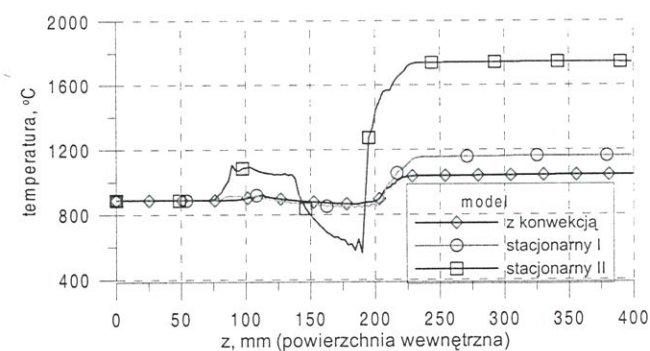


Rysunek 14. Przebieg zmian intensywności prędkości odkształcenia w procesie wydłużania tulei II.

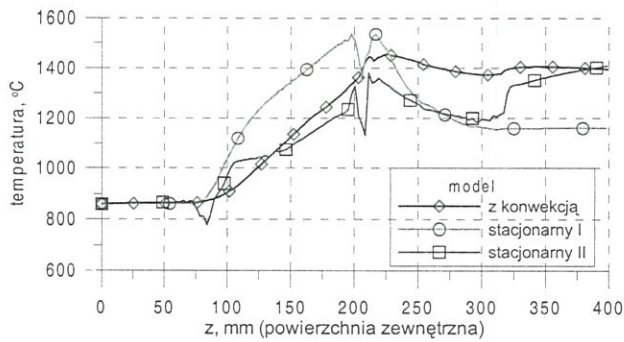
stacjonarny I dał dokładniejsze wyniki od modeli stacjonarnego II na powierzchni wewnętrznej, natomiast na powierzchni zewnętrznej dokładniejsze wyniki dał model stacjonarny II od modelu stacjonarnego I. W przypadku wydłużania tulei II modele stacjonarne wykazały odwrotną tendencję w dokładności niż w przypadku wydłużania tulei I. Wykonane testy wskazują na brak możliwości dobrania funkcji wagi prowadzących do stabilnych rozwiązań w szerszym zakresie gradientów pola prędkości. Wyniki obliczeń pola temperatury z pominięciem ciepła odkształcenia plastycznego i ciepła tarcia dla wydłużania tulei II przedstawiono na rysunkach 17 i 18. Modele stacjonarne również w tym przypadku nie dały stabilnych rozwiązań.

Dalszym testom poddano model niestacjonarny z konwekcją. Badano wpływ liczby elementów na dokładność wyznaczania pola temperatury. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 19 i 20. W celu wyeliminowania sprzężenia z modelem mechanicznym pominięto ciepło tarcia i ciepło odkształcenia plastycznego. Zagęszczenie siatki elementów nie prowadzi w tym przypadku do zmian pola temperatury. Testowany model daje stabilne wyniki obliczeń pola temperatury w szerokim zakresie gęstości siatki elementów.

Na rysunkach 21 i 22 przedstawiono wyniki testów modelu niestacjonarnego z konwekcją z uwzględnieniem ciepła odkształcenia plastycznego i ciepła tar-



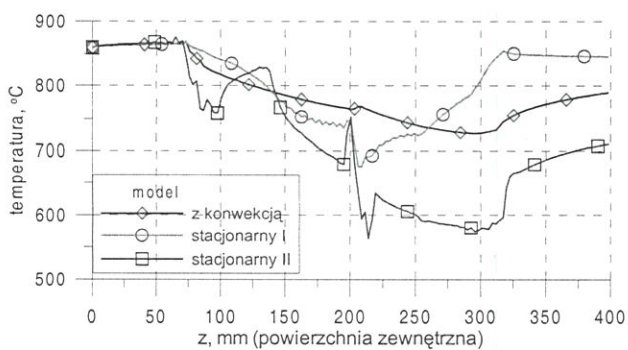
Rysunek 15. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone testowanymi modelami, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II.



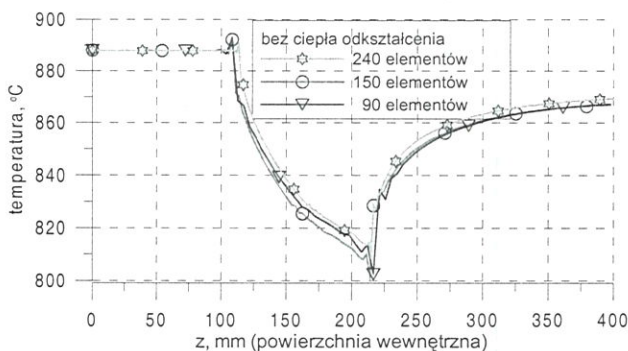
Rysunek 16. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone testowanymi modelami, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II.



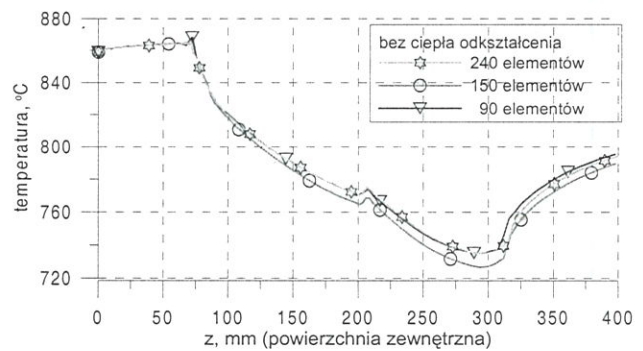
Rysunek 17. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone testowanymi modelami, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II. Wyznaczone testowanymi modelami z pominięciem źródła ciepła i ciepła tarcia.



Rysunek 18. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone testowanymi modelami, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II. Wyznaczone testowanymi modelami z pominięciem źródła ciepła i ciepła tarcia.

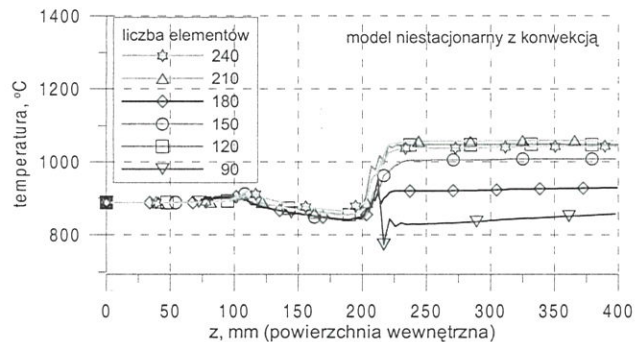


Rysunek 19. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone modelem niestacjonarnym z konwekcją, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II. Wyznaczone z zastosowaniem różnej liczby elementów z pominięciem źródła ciepła i ciepła tarcia.

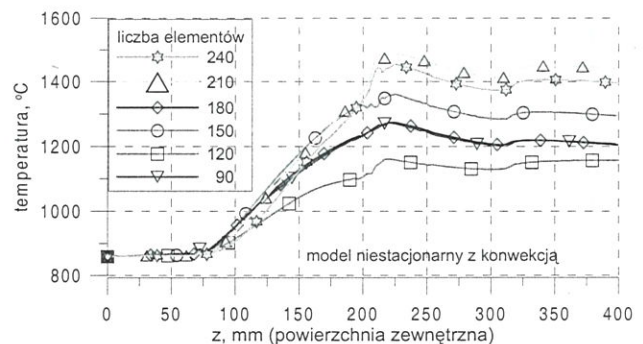


Rysunek 20. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone modelem niestacjonarnym z konwekcją, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II. Wyznaczone z zastosowaniem różnej liczby elementów z pominięciem źródła ciepła i ciepła tarcia.

cia. W tym przypadku zachodzi wzajemny wpływ pola temperatury i pola odkształceń. Większa liczba elementów 4-węzłowych prowadzi do dokładniejszego opisu kształtu tulei, powierzchni styku i naprężenia uplastyczniającego. W rezultacie uzyskuje się inne pole prędkości w modelu mechanicznym. Różne pola prędkości dają różniące się od siebie gęstości wewnętrzne źródła ciepła. Wyznaczane pola temperatury są poprawne, za wyjątkiem przypadku otrzymanego z zastosowaniem 90 elementów, zmieniają się jednak wraz ze zmianą liczby elementów. Zmiany zanikają przy liczbie elementów 210 i 240, gdzie wyniki są prawie identyczne. Wykonane testy wskazują na



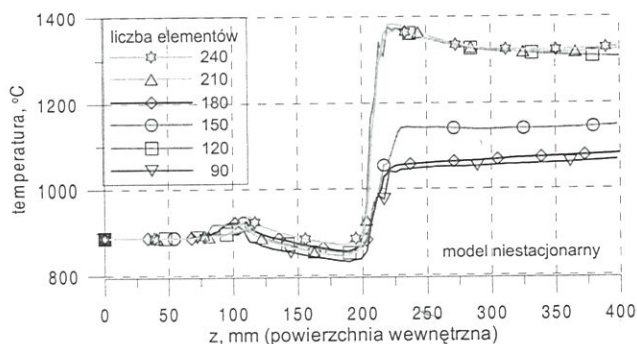
Rysunek 21. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone modelem niestacjonarnym z konwekcją, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II.



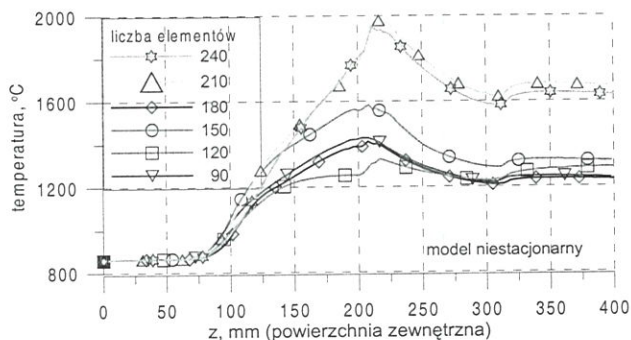
Rysunek 22. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone modelem niestacjonarnym z konwekcją, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II.

konieczność stosowania gęstszych siatek elementów w problemach w których istnieje sprzężenie pól odkształceń i pól temperatury. Dobranie właściwej liczby elementów wymaga wykonania obliczeń testujących, nie można bowiem stwierdzić na podstawie pojedynczego testu, czy zastosowana liczba elementów jest wystarczająca.

Wykonano również obliczenia pola temperatury typowym modelem niestacjonarnym, nie uwzględniającym ruchu ośrodka. Model ten nie uwzględnia konwekcji ciepła w odkształcanym materiale wynikającej z pola prędkości. Wyniki obliczeń wpływu liczby elementów przedstawiono na rysunkach 23 i 24. We wszystkich testach uzyskano wyniki stabilne. Występuje jednak, podobnie jak w przypadku modelu niestacjonarnego z konwekcją, związek liczby elementów z uzyskiwanymi wartościami temperatury w węzłach elementów. Powtarzalne wyniki uzyskano dla 210 i 240 elementów. Potwierdza to tezę o wpływie liczby elementów na wzajemne oddziaływanie modelu wymiany ciepła i modelu mechanicznego. Porównanie wyników uzyskanych modelami niestacjonarnymi wykazuje na konieczność uwzględniania wpływu konwekcji w obliczeniach pola temperatury w procesach przeróbki plastycznej prowadzonych z dużymi gradientami pola prędkości. Zastosowanie typowych modeli niestacjonarnych, pomijających konwekcję prowadzi do zawyżania pola temperatury.



Rysunek 23. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone modelem niestacjonarnym, na powierzchni wewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II.



Rysunek 24. Przebiegi zmian temperatury, wyznaczone modelem niestacjonarnym, na powierzchni zewnętrznej tulei w procesie wydłużania tulei II.

5. PODSUMOWANIE

Badano stabilność algorytmów metody elementów skończonych w rozwiązaniach równania przewodzenia ciepła w warunkach konwekcji i obecności wewnętrznego źródła ciepła. Uzyskane wyniki wskazują na brak stabilności rozwiązań stacjonarnych w przypadku złożonego płynięcia materiału. Zastosowane schematy numeryczne stabilizacji rozwiązań stacjonarnych nie cechują się niezawodnością. Powodem są zbyt duże gradienty pola prędkości występujące w testowanym procesie wydłużania tulei. Wykonane testy wskazują na brak możliwości dobrania funkcji wagi prowadzących do stabilnych rozwiązań w szerszym zakresie gradientów pola prędkości. Rozwiązanie niestacjonarne z uwzględnieniem konwekcji prowadzi do poprawnego rozwiązania równania przewodzenia ciepła. Jednak konieczne jest dobranie wystarczającej gęstości siatki elementów. Dobranie właściwej liczby elementów wymaga wykonania obliczeń testujących, nie można bowiem stwierdzić na podstawie pojedynczego testu, czy zastosowana liczba elementów jest wystarczająca. Porównanie wyników uzyskanych modelami niestacjonarnymi wskazuje na konieczność uwzględniania wpływu konwekcji w obliczeniach pola temperatury w procesach przeróbki plastycznej prowadzonych z dużymi gradientami pola prędkości. Zastosowanie typowych modeli niestacjonarnych, pomijających konwekcję, prowadzi do zawyżania pola temperatury.

Uwaga końcowa: Praca wykonana w ramach działalności statutowej 11.11.110.114. Wydział Metalurgii i Inżynierii Materiałowej. Akademia Górniczo-Hutnicza.

LITERATURA

- Heinrich, J. C., Huyakorn, P. S., Zienkiewicz, O.C., 1977, An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 11, 131-143.
- Malinowski, Z., 1994, Prognozowanie pól naprężeń metodą elementów skończonych w materiałach poddawanych dużym odkształceniom plastycznym. *Rozprawy Monograficzne*, Nr 13, Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Malinowski, Z., Lenard, J.G., 1993, Experimental substantiation of an elastoplastic finite element scheme for flat rolling. *Comp. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, 104, 1-17.
- Malinowski, Z., Szyndler, R., 1987, Axial transformations method in the analysis of the axisymmetric plastic flow, *Steel research*, 58, 503-507.
- Malinowski, Z., Kazanecki, J., Urbański, S., 1996, Thermal-mechanical model of the tube elongation process in Diescher's mill. *J. Mat. Proc. Techn.*, 60, 513-516.
- Pietrzyk, M., Lenard, J.G., 1991, Thermomechanical Modelling of the Flat Rolling Process, Springer-Verlag, Berlin.
- Shida, S., 1974, Effect of Carbon Content, Temperature and Strain Rate on Compressive Flow Stress of Carbon Steel, *Hitachi Res. Lab. Report*, 1-9.
- Zehnder, A.T., 1991, A model for the heating due to plastic work, *Mechanics Research Communications*, 18, 23-28.