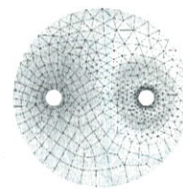




Wydawnictwo
Naukowe
AKAPIT



MODELOWANIE NUMERYCZNE KRZEPNIĘCIA ODLEWÓW. SEKWENCYJNE I RÓWNOLEGŁE SYMULACJE KOMPUTEROWE

RYSZARD PARKITNY, ROMAN WYRZYKOWSKI, NORBERT SCZYGIOL,
ARKADIUSZ NAGÓRKA, TOMASZ OLAS, GRZEGORZ SZWARC

NUMERICAL MODELLING OF SOLIDIFICATION OF CASTINGS. SEQUENTIAL AND PARALLEL COMPUTER SIMULATIONS

Abstract

The work concerns numerical modelling of solidification of castings. Enthalpy formulations were used for mathematical description of solidification. Special attention was paid to the possibility of modelling the structure arising during solidification. The so-called indirect model was used to describe the growth of the solid phase, which allows the created structure to be taken into account in temperature field calculations. The finite element method was used for numerical solution of the problem. Computer simulations were performed by the use of self-made solvers. First of them works sequentially, which means that all calculations are performed on a single processor. Another one works in parallel, performing calculations on many processors at the same time. In the parallel version the whole problem is divided into smaller parts, called domains, and solved on particular processors. The parallelisation is an efficient way of shortening the time of numerical simulations of solidification.

1. WPROWADZENIE

Odlewanie jest jedną z metod produkcji elementów maszyn i urządzeń. Wyroby odlewane charakteryzują się tym, że ich kształty, a w znacznym stopniu i własności, nadawane są w trakcie przechodzenia ciekłego metalu w stan stały. Przejście ciekłego metalu w stan stały jest procesem, na który składa się wiele zjawisk fizycznych, takich jak: przepływ ciepła, ruch ciekłego metalu, wydzielanie się utajonego ciepła krzepnięcia, dyfuzja i in. Duże znaczenie mają także inne zjawiska, wpływające głównie na wartość użytkową odlewów, a będące często następstwem wcześniej wymienionych zjawisk. Należą do nich: powsta-

wanie struktury, powstawanie naprężeń, skurcz oraz cały szereg wad odlewniczych.

Krzepnięcie stopów metali przebiega najczęściej w pewnych przedziałach temperatur, zwanych temperaturowymi przedziałami krzepnięcia. Początek krzepnięcia stopu nazywa się temperaturą likwidus (T_L), natomiast koniec krzepnięcia nazywa się temperaturą solidus (T_S). Podczas krzepnięcia faza stała jest oddzielona od fazy ciekłej tzw. obszarem dwufazowym (frontem krzepnięcia), w którym obie te fazy występują jednocześnie. Szerokość obszaru dwufazowego zależy od składu chemicznego krzepnącego stopu oraz od prędkości krzepnięcia (narastania fazy stałej), czyli od warunków odprowadzania ciepła z odlewu. Wy-

R. Parkitny, N. Szygiol, A. Nagórka, G. Szwarz, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Częstochowska;
R. Wyrzykowski, T. Olas, Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

stępowanie obszaru dwufazowego oraz jego dynamika w procesie krzepnięcia rzutu z kolej na strukturę zakrzepłego metalu.

W modelowaniu numerycznym i symulacjach komputerowych najpowszechniej stosowana jest obecnie metoda elementów skończonych. W niniejszej pracy także zastosowano tę metodę, przy czym zwrócono szczególną uwagę na jej przydatność w połączeniu z entalpowymi sformułowaniami krzepnięcia (Dahlhijzen i Segal 1986, Voller i in. 1990). Zastosowanie tzw. pośredniego modelu krzepnięcia pozwala ponadto na bezpośrednie uwzględnienie w modelu numerycznym powstającej struktury (Szczygiol 2001b). W tej pracy uwzględniono możliwość powstawania jedynie struktury równoosiowej.

Przy wykonywaniu obliczeń dla dużych zagadnień (szczególnie 3D) zastosowanie pojedynczego komputera (procesora) może okazać się niewystarczające (Topping i in. 1996). Złożoność obliczeniowa takiego zagadnienia powoduje, że czas jego sekwencyjnego rozwiązywania może być zbyt długi. Również inne zasoby pojedynczego komputera, np. pamięć operacyjna, mogą okazać się niewystarczające. Przetwarzanie równoległe rozwiązuje powyższe problemy poprzez podział zadania na mniejsze fragmenty i ich implementację w komputerze równoległym, czy też w klastrze komputerów (Wyrzykowski i in. 2000b).

2. RÓWNANIA KRZEPNIĘCIA

Krzepnięcie jest opisywane przez quasi-liniowe równanie przewodnictwa ciepła zawierające człon źródła ciepła \dot{q} , opisujący szybkość wydzielania się ciepła utajonego

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \dot{q} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

gdzie T oznacza temperaturę, t oznacza czas, λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, ρ jest gęstością oraz c jest ciepłem właściwym. Człon źródła ciepła jest zdefiniowany jako

$$\dot{q} = \rho_s L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (2)$$

gdzie L jest utajonym ciepłem krzepnięcia oraz f_s jest udziałem fazy stałej, zdefiniowanym jako iloraz objętości zakrzepłej do objętości całkowitej różniczkowego obszaru odlewu (przyszłego ziarna).

Wprowadzając entalpię, zdefiniowaną następująco

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T c\rho(T) dT + \rho_s L (1 - f_s(T)) \quad (3)$$

gdzie T_{ref} jest temperaturą odniesienia, natomiast c jest pojemnością cieplną, można przejść do tzw. entalpowych sformułowań krzepnięcia. Najpowszechniej

stosowane są:

1. podstawowe sformułowanie entalpowe

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4)$$

które otrzymuje się różniczkując względem czasu entalpię daną wzorem (3)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_s L \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (5)$$

2. jawne sformułowanie pojemnościowe

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = c^*(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

zawierające zastępczą pojemność cieplną (c^*), które otrzymuje się różniczkując entalpię (3) względem temperatury

$$\frac{dH}{dT} = c\rho - \rho_s L \frac{df_s}{dT} = c^*(T) \quad (7)$$

Dla metalu krzepnącego w przedziale temperatur ($T_L - T_S$), przy założeniu, że utajone ciepło krzepnięcia może wydzielać się w nim w dowolny sposób, entalpia wynosi

$$H = \begin{cases} \int_{T_{ref}}^T c\rho_s dT, & T < T_S \\ \int_{T_{ref}}^{T_S} c\rho_s dT + \int_{T_S}^T \left(c\rho_f - \rho_s L \frac{df_s}{dT} \right) dT, & T_S \leq T \leq T_L \\ \int_{T_{ref}}^{T_S} c\rho_s dT + \rho_s L + \int_{T_S}^{T_L} c\rho_f dT + \int_{T_L}^T c\rho_l dT, & T > T_L \end{cases} \quad (8)$$

W jawnym sformułowaniu pojemnościowym występuje zastępcza pojemność cieplna. Jest ona obliczana jako pochodna entalpii względem temperatury (patrz równ. (7)). Ponieważ zwykle przybliżenie różnicowe prowadzi najczęściej do znacznych błędów numerycznych, a także oscylacji rozwiązania (Dahlhijzen i Segal 1986), dlatego pochodna ta wymaga odpowiedniej aproksymacji. Istnieje kilka schematów aproksymacji zastępczej pojemności cieplnej. W niniejszej pracy do jej obliczenia zastosowano schemat Del Giudice'a (Dahlhijzen i Segal 1986), w którym

$$c^* = \frac{H_{,\alpha} T_{,\alpha}}{T_{,\beta} T_{,\beta}} \quad (9)$$

gdzie α i β oznaczają współrzędne przestrzenne.

2.1. Rozwiązanie metodą elementów skończonych

Równania opisujące poszczególne sformułowania krzepnięcia są przekształcane, z zastosowaniem metody elementów skończonych, w ten sposób, aby możliwe było zbudowanie odpowiednich układów równań algebraicznych. W wyniku semidyskretyzacji, tzn.



dyskretyzacji jedynie po przestrzeni, otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne z pochodnymi względem czasu. W kolejnym etapie, czyli dyskretyzacji po czasie, przekształcane są one w układy równań algebraicznych, obowiązujące dla pojedynczych elementów skończonych. W wyniku asemblacji, przeprowadzonej dla wszystkich elementów skończonych zadania, otrzymuje się globalny układ równań.

Ponieważ własności materiału odlewu zależą od temperatury, dlatego najlepiej jest zastosować taki schemat całkowania po czasie, który wyeliminuje konieczność iteracyjnego poszukiwania aktualnych wartości parametrów materiałowych. W tym celu zastosowano dwukrokowy schemat Dupont II. Wymaga on jednak zastosowania w pierwszym kroku czasowym schematu jednokrokowego. Aby w dalszym ciągu uniknąć iteracyjnego poszukiwania parametrów materiałowych zależnych od temperatury, użyto zmodyfikowanego wstecznego schematu Eulera (Wood 1990).

Dla podstawowego sformułowania entalpowego otrzymano w ten sposób następujące równania (Szczygiol 2000b, Szczygiol 2001a):

- dla pierwszego kroku czasowego (zmodyfikowany wsteczny schemat Eulera)

$$\left(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}^n \left[\frac{dT}{dH} \right]^n \right) \mathbf{H}^{n+1} = \left(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}^n \left[\frac{dT}{dH} \right]^n \right) \mathbf{H}^n - \Delta t \mathbf{K}^n \mathbf{T}^n + \Delta t \mathbf{b}^{n+1} \quad (10)$$

- dla pozostałych kroków czasowych (schemat Dupont II)

$$\left(\mathbf{M} + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{K}^0 \left[\frac{dT}{dH} \right]^{n+1} \right) \mathbf{H}^{n+2} = \left(\mathbf{M} + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{K}^0 \left[\frac{dT}{dH} \right]^{n+1} \right) \mathbf{H}^{n+1} - \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{K}^0 \mathbf{T}^{n+1} - \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{K}^0 \mathbf{T}^n + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{b}^{n+2} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{b}^n \quad (11)$$

Podobnie, dla jawnego sformułowania entalpowego otrzymuje się:

- dla pierwszego kroku czasowego (zmodyfikowany wsteczny schemat Eulera)

$$\left(\mathbf{M}^{n+1} + \Delta t \mathbf{K}^{n+1} \right) \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{M}^n \mathbf{T}^n + \Delta t \mathbf{b}^{n+1} \quad (12)$$

- dla pozostałych kroków czasowych (schemat Dupont II)

$$\left(\mathbf{M}^0 + \frac{3}{4} \Delta t \mathbf{K}^0 \right) \mathbf{T}^{n+2} = \mathbf{M}^0 \mathbf{T}^{n+1} - \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{K}^0 \mathbf{T}^n + \frac{1}{4} \Delta t \left(3 \mathbf{b}^{n+2} + \mathbf{b}^n \right) \quad (13)$$

W równaniach tych \mathbf{M} jest macierzą masową, \mathbf{K} jest macierzą przewodności, \mathbf{T} jest wektorem temperatury, \mathbf{H} jest wektorem entalpii, natomiast \mathbf{b} jest wektorem uwzględniającym warunki brzegowe. $d\mathbf{T}/d\mathbf{H}$ jest macierzą diagonalną, której współczynniki oblicza się na podstawie równań (8). Dla podstawowego sformułowania entalpowego macierz masowa nie zawiera żadnych parametrów materiałowych, natomiast dla jawnego sformułowania pojemnościowego zawiera ona zastępczą pojemność cieplną, którą w niniejszej pracy obliczano z przekształconej zależności (9)

$$c^* = \frac{H_i N_{i,\alpha} T_j N_{j,\alpha}}{T_k N_{k,\beta} T_l N_{l,\beta}} \quad (14)$$

gdzie $i, j = 1..w$, oraz w jest liczbą węzłów w elemencie skończonym.

Indeks górny $(^0)$ oznacza, że własności materiałowe są obliczane dla ekstrapolowanej temperatury

$$T = \frac{3}{2} T^{n+1} - \frac{1}{2} T^n \quad (15)$$

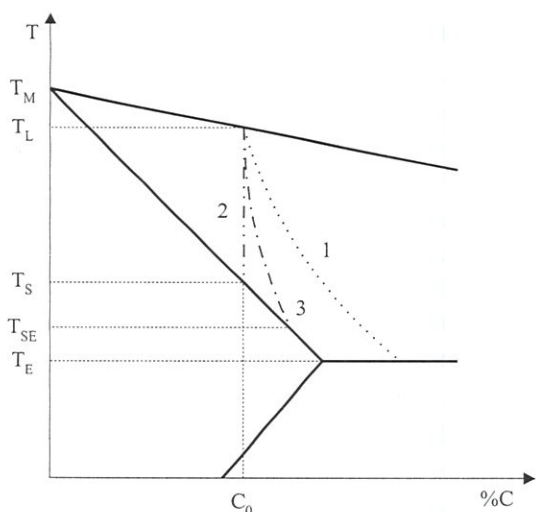
Sposób wprowadzania warunków brzegowych w obu sformułowaniach został szczegółowo opisany w pracy Szczygiola i Szwarca (2001).

2.2. Modelowanie narastania fazy stałej

Zachowanie się stopów metali w zależności od temperatury i składu chemicznego przedstawiane jest za pomocą wykresów fazowych. Przebiegi krzepnięcia mogą być przedstawiane za pomocą krzywych pomiędzy liniami likwidus i solidus na wykresie fazowym. Krzywe te charakteryzują ilościowe zmiany udziałów fazy stałej i ciekłej w funkcji temperatury. Można je zatem nazwać *krzywymi krzepnięcia*. Wszystkie możliwe krzywe krzepnięcia mieszczą się pomiędzy dwoma skrajnymi przypadkami. Pierwszy z nich opisuje krzepnięcie równowagowe, przebiegające w ten sposób, że zarówno w fazie ciekłej, jak i stałej odlewu (w ziarnach) ma miejsce jednorodny rozkład stężeń domieszek. Drugim przypadkiem skrajnym jest krzepnięcie nierównowagowe, charakteryzujące się tym, że znaczne ilości domieszek wypychane są do fazy ciekłej. W modelowaniu numerycznym krzepnięcia nierównowagowego przyjmuje się, że w fazie stałej odlewu nie ma dyfuzji domieszek. Pomiedzy tymi skrajnymi przypadkami występują przebiegi krzepnięcia charakterystyczne dla ogromnej większości odlewów. Dla bardzo szerokiego pasma przebiegów krzepnięcia w fazie stałej narastających ziaren następuje

bowiem znacząca dyfuzja domieszek. Krzepnięcie, w którym nie zachodzi wyrównanie rozkładu stężenia domieszek w fazie stałej, ale dyfuzja domieszek jest znacząca, nazwać można krzepnięciem pośrednim (Szczygiol 2000a).

Fragment wykresu fazowego dla stopu dwuskładnikowego z przemianą eutektyczną pokazany jest na rys. 1. Na osi odciętych zaznaczony jest skład chemiczny stopu, natomiast na osi rzędnych temperatura. Temperatura krzepnięcia składnika podstawowego wynosi T_M . Przez T_S oznaczono temperaturę solidus dla modelu krzepnięcia równowagowego, natomiast przez T_{SE} temperaturę solidus dla modelu krzepnięcia pośredniego. Dla stopu o stężeniu domieszki wynoszącym C_0 między liniami likwidusu i solidus pokazano schematycznie możliwe przebiegi (krzywe) krzepnięcia.



Rysunek 1. Modele narastania fazy stałej w stopach dwuskładnikowych (1 – nierównowagowy, 2 – równowagowy, 3 – pośredni)

Na przykładzie stopów dwuskładnikowych z przemianą eutektyczną, dla każdego modelu krzepnięcia można zbudować odpowiedni model numeryczny narastania fazy stałej. W przypadku modelu krzepnięcia nierównowagowego, opisanego równaniem Scheila, zawsze dochodzi do osiągnięcia przez krzepnący stop temperatury eutektycznej (linia 1). Oznacza to, że pewna końcowa porcja metalu krzepnie w stałej temperaturze. W modelu krzepnięcia równowagowego (linia 2) temperatura końca krzepnięcia jest uzależniona od składu chemicznego. Jedynie dla stopów, w których stężenie domieszki jest większe od maksymalnej jej rozpuszczalności w fazie stałej, temperatura końca krzepnięcia jest równa temperaturze eutektycznej (T_E). W modelu krzepnięcia pośredniego (linia 3), którego granice wyznaczają modele krzepnięcia równowagowego i nierównowagowego, przebieg krzepnięcia jest uzależniony od drogi dyfuzji domieszki, a zatem od wielkości ziaren w strukturze

odlewu. Średni wymiar ziaren jest z kolei związany z prędkością stygnięcia (Ozbayraktar i Kousaris 1996).

Dla dwuskładnikowych stopów metali istnieje możliwość otrzymania funkcji analitycznych opisujących zależność udziału fazy stałej od temperatury. Funkcje te otrzymuje się z rozwiązania równań bilansu masy domieszki w obrębie pojedynczego ziarna. Postać równania bilansu masy domieszki jest zależna od przyjętego modelu krzepnięcia, ponieważ dla każdego modelu wprowadza się pewne założenia upraszczające. W pośrednim modelu krzepnięcia przyjmuje się, że w fazie ciekłej rozważanego obszaru (przyszłego ziarna) następuje pełne rozprowadzenie domieszki, natomiast w fazie stałej następuje jej dyfuzja. Rozwiązanie tego równania wiąże stężenie domieszki, na powierzchni krzepnięcia, z udziałem fazy stałej. Korzystając ponadto z zależności otrzymanych z wykresu fazowego, a wiążących stężenie domieszki z temperaturą, rozwiązanie równania dyfuzji domieszki można zapisać w postaci (Szczygiol 2000a, Szczygiol 2001b)

$$f_s(T) = \frac{1}{1 - nk\alpha} \left(1 - \left(\frac{T_M - T}{T_M - T_L} \right)^{\frac{1 - nk\alpha}{k-1}} \right) \quad (16)$$

gdzie n jest współczynnikiem ujmującym kształt ziarna. Wynosi on 2 dla ziarna płaskiego, 4 dla ziarna cylindrycznego i 6 dla ziarna sferycznego. Natomiast k jest współczynnikiem rozdziału domieszki, zdefiniowanym jako

$$k = \frac{C_s^*}{C_l^*} \quad (17)$$

przy czym C^* oznacza stężenie domieszki na powierzchni krzepnięcia. Współczynnik α , noszący nazwę współczynnika Brody-Flemingasa (Clyne i Kurz 1981), wynosi natomiast

$$\alpha = D_s t_f / r_z^2 \quad (18)$$

Iloczyn $D_s t_f$ można traktować jako parametr materiałowy. Dla wartości współczynnika α powyżej pewnej granicznej wartości, zależnej od kształtu ziarna, zastosowanie wzoru (16) prowadzi do otrzymania wyników fizycznie nierealnych. Udział fazy stałej osiąga dla nich wartość 1 dla temperatur wyższych od temperatury solidus. Tej niedogodności można się pozbyć wprowadzając odpowiednią poprawkę na wartość α . Poprawka taka została wyprowadzona jedynie dla ziaren płaskich (płytek), tzn. dla $n = 2$. Wynosi ona (Clyne i Kurz 1981)

$$\Omega(\alpha) = \alpha(1 - \exp(-1/\alpha)) - 1/2 \exp(-1/2\alpha) \quad (19)$$

Po zastosowaniu tej poprawki współczynnik α może przyjmować dowolne wartości z dodatniej czę-

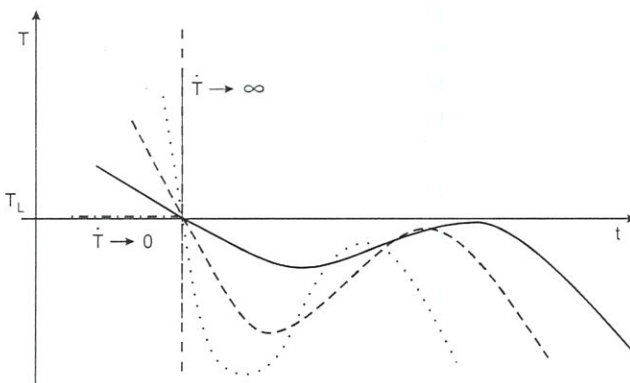
ści osi liczbowej. Współczynnik Ω przyjmuje natomiast wartości z przedziału od 0 do 0,5. Zastosowanie poprawki polega na zastąpieniu współczynnika a w równaniu (16) współczynnikiem Ω .

Jeżeli w modelu numerycznym krzepnięcia założy się możliwość powstawania ziaren o różnej wielkości, to wtedy zgodnie z (16), w stopie o stężeniu domieszki mniejszym od jej maksymalnej rozpuszczalności w fazie stałej, część ziaren podczas krzepnięcia może osiągnąć temperaturę eutektyczną, natomiast część może zakrzepnąć powyżej tej temperatury. Jeżeli stężenie domieszki jest równe lub większe od jej maksymalnej rozpuszczalności w fazie stałej, to wtedy oczywiście wszystkie ziarna osiągną podczas krzepnięcia temperaturę eutektyczną. Jeżeli natomiast stężenie domieszki jest mniejsze od jej maksymalnej rozpuszczalności w fazie stałej, to decydujące znaczenie ma wymiar ziarna i krzepnięcie może przebiegać pomiędzy granicami wyznaczonymi przez model krzepnięcia równowagowego i model krzepnięcia nierównowagowego.

2.3. Modelowanie struktury równoosiowej

Modelowanie numeryczne struktury tworzącej się w odlewie jest jednym z najtrudniejszych zagadnień w symulacji komputerowej krzepnięcia. Rozciągłości stref różnych typów struktury, jak również wymiary charakterystyczne ziaren w tych strefach, zależą od stopnia przechłodzenia ciekłego metalu w chwili rozpoczęcia krzepnięcia. Przechłodzenie to z kolei zależy od szybkości odprowadzania ciepła z odlewu, czyli od prędkości jego stygnięcia.

Wszystkie możliwe do osiągnięcia prędkości stygnięcia mieszczą się w granicach między nieskończenie dużą i nieskończenie małą prędkością stygnięcia (rys. 2). Pierwsza z nich ($\dot{T} \rightarrow \infty$) odpowiada otrzymywaniu struktur szklistych, druga ($\dot{T} \rightarrow 0$) – krzepnięciu równowagowemu (Parkitny i in. 2000). W odlewach rzeczywistych, w normalnych warunkach odlewania, żaden z tych granicznych przypadków nie



Rysunek 2. Krzywe stygnięcia dla różnych prędkości stygnięcia.

zachodzi. Prędkości stygnięcia w jednym odlewie zmieniają się jednak w bardzo szerokim zakresie wartości.

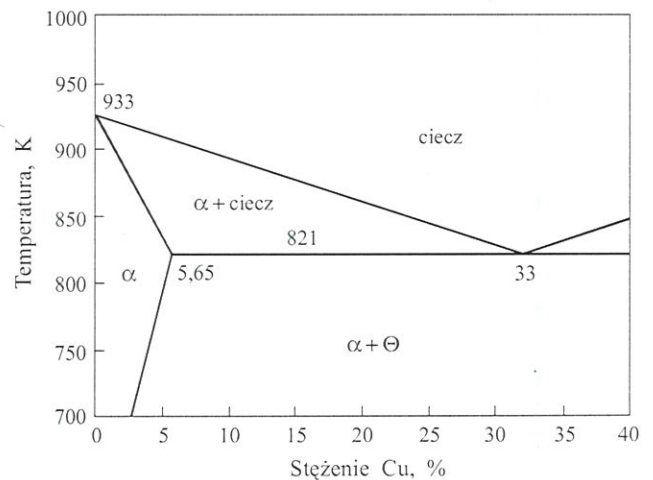
Bezpośrednie uwzględnienie przechłodzenia ciekłego metalu w modelu krzepnięcia prowadzi do wielu komplikacji numerycznych. Znacznie lepszym rozwiązaniem jest przyjęcie założenia, że krzepnięcie rozpoczyna się w temperaturze likwidus, natomiast wielkość przechłodzenia, reprezentowanego tutaj przez prędkość stygnięcia, decyduje o charakterystycznych wymiarach powstającej struktury.

W niniejszej pracy przyjęto, że w odlewie powstaje tylko jeden typ struktury, a mianowicie struktura równoosiowa. Przyjęto także, że wymiarem charakterystycznym jest końcowy promień ziarna, którego wielkość można uzależnić od prędkości stygnięcia w następujący sposób (Parkitny i in. 2000)

$$r_z = r_b [1 - \exp(-1/\dot{T})] \quad (20)$$

gdzie r_b jest maksymalnym promieniem ziarna w obliczanej strukturze, natomiast \dot{T} jest średnią prędkością stygnięcia, liczoną od początku procesu do chwili osiągnięcia temperatury likwidus. W równaniu (20) maksymalny promień ziarna jest wielkością zależną od rodzaju odlewanej stopu i powinien on być ustalony na podstawie eksperymentu. Przebieg krzywej rozkładu wielkości ziaren równoosiowych, otrzymany za pomocą wzoru (20) jest zgodny z przebiegami otrzymanymi doświadczalnie (Ozbyranktar i Kousaris 1996). Dla bardzo dużych wartości przechłodzenia (dla dużych \dot{T}) otrzymuje się strukturę drobnoziarnistą, w tym strefę ziaren zamrożonych. W wewnętrznych obszarach odlewu, których przechłodzenie jest znacznie mniejsze od przechłodzenia warstw stykających się z formą, a ponadto nie jest ono mocno zróżnicowane, promienie ziaren równoosiowych są mniej więcej jednakowe i stosunkowo duże.

W celu weryfikacji równania (20) przeprowadzono badania eksperymentalne dla stopu Al-2%Cu (rys.



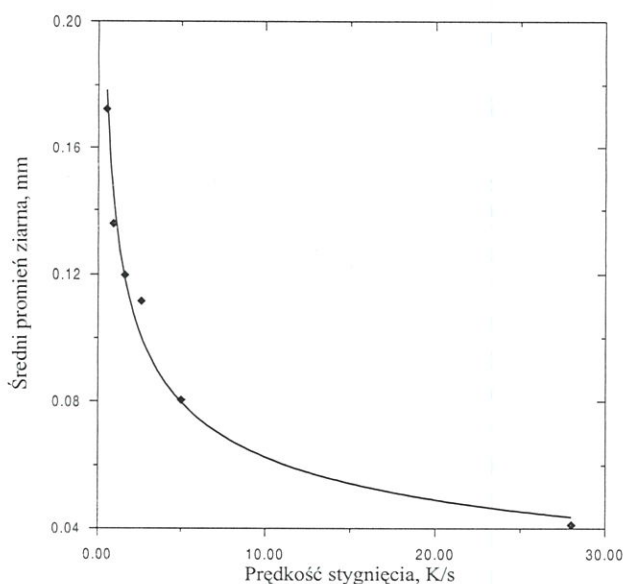
Rysunek 3. Fragment wykresu fazowego Al-Cu.

3). Stop ten wybrano dlatego, że charakteryzuje się on stosunkowo szerokim temperaturowym przedziałem krzepnięcia (ok. 50 K), a ponadto stopy Al-Cu tworzą eutektykę.

Na podstawie wyznaczonych średnich promieni ziaren oraz odpowiadających im prędkości stygnięcia przeprowadzono aproksymację, w wyniku której otrzymano następującą funkcję opisującą zależność promienia ziarna równoosiowego od prędkości stygnięcia (Szczygiol 2000a)

$$r = 0,14(\dot{T})^{-0,35} \quad (21)$$

gdzie r jest promieniem ziarna w mm, natomiast \dot{T} jest prędkością stygnięcia w K/s. Wykres tej funkcji oraz wyniki otrzymane z pomiarów pokazane są na rys. 4. Funkcja (21) jest podobna do funkcji przedstawionej przez Ozbayraktara i Kousarisa (1996).



Rysunek 4. Zależność promienia ziarna od prędkości stygnięcia (♦ – wyniki pomiarów).

Wielkości ziaren równoosiowych otrzymane w wyniku przeprowadzonych badań odpowiadają wielkościom ziaren w modyfikowanych stopach Al-Cu (Chen i Huang 1996). Wynika to stąd, że w badanym stopie dwuskładnikowym znajdowały się również znaczące ilości innych pierwiastków, co spowodowało rozdrobnienie ziarna podczas krzepnięcia.

3. MOŻLIWOŚĆ ZRÓWNOLEGLIENIA OBLICZEŃ KRZEPNIĘCIA

Przetwarzanie równoległe (i rozproszone) jest procesem obliczeniowym zachodzącym jednocześnie na więcej niż jednym procesorze. Całe zadanie jest podzielone na mniejsze części, zwane domenami, i uruchamiane na poszczególnych procesorach w tzw. procesach. Poszczególne procesy są od siebie zależne i

niezbędna jest wymiana danych między nimi. Procesy mogą być przyporządkowane procesorom w komputerze równoległym lub poszczególnym komputerom (jednoprocessorowym) w systemie rozproszonym.

W przetwarzaniu równoległym i rozproszonym wyróżnia się kilka modeli działania programów obliczeniowych, ściśle związanych ze sposobem ich tworzenia. Najważniejsze z nich to (Culler i in. 1999, Foster 1995, Buyya 1999 oraz Viet i in. 1999):

1. model z wykorzystaniem kompilatorów zrównoleglających programy sekwencyjne – kompilatory takie są jeszcze we wczesnej fazie rozwoju i dlatego obecnie nie nadają się do praktycznego użytku,
 2. model z równoległością danych – polegający na wstępnym przyporządkowaniu danych do procesów przez programistę, natomiast przydział zadań do poszczególnych procesorów oraz realizacja operacji komunikacji jest wykonywana automatycznie przez kompilator,
 3. model z równoległością sterowania – polegający na odpowiedniej synchronizacji dostępu do pamięci współdzielonej oraz porządkowaniu zdarzeń,
 4. model PRAM (ang. *Parallel Random Access Machine*) – często używany w rozważaniach teoretycznych i zakładający możliwość dostępu dowolnego procesora do dowolnej komórki pamięci wspólnej w tym samym momencie czasu; ogranicza to jego skalowalność czyli celowość zwiększania liczby procesorów w systemie; w modelu tym komunikacja między procesami i ich synchronizacja odbywa się z użyciem zmiennych globalnych, co upraszcza proces programowania, gdyż minimalizuje problemy związane z przydziałem danych do poszczególnych procesorów oraz dynamicznym równoważeniem ich obciążenia,
 5. model z wymianą komunikatów – polegający na komunikowaniu się procesów mających bezpośredni dostęp jedynie do ich pamięci lokalnych; model ten jest zaimplementowany m. in. w środowiskach PVM (ang. *Parallel Virtual Machine*) oraz MPI (ang. *Message-Passing Interface*),
 6. model z wykorzystaniem zdalnego wywołania procedur – będący rozwiązaniem pośrednim pomiędzy modelami z równoległością sterowania i wymianą komunikatów; model ten jest stosowany m. in. w języku Java oraz w systemie CORBA (ang. *Common Object Request Broker Architecture*),
 7. model wielowątkowy – stanowiący rozwinięcie modelu z równoległością sterowania, w którym procesy zostały zastąpione przez wątki, będące sekwencjami sterowania wewnątrz procesów.
- Wybór modelu działania programu związany jest przede wszystkim z posiadanym komputerem wieloprocessorowym lub systemem rozproszonym.

Wykonanie symulacji komputerowej za pomocą metody elementów skończonych składa się z kilku następujących po sobie etapów. Niektóre z nich mogą być zrównoleglone, innych z kolei nie opłaca się zrównoleglać. Przykładowo, na etapie przygotowania zadania do rozwiązania jedyną operacją, którą należałoby zrównoleglić jest automatyczne tworzenie siatki elementów skończonych. Natomiast zadawanie własności materiałowych, warunków brzegowych i warunków początkowych nie wymaga zrównoleglenia.

Najbardziej czasochłonnymi etapami modelowania metodą elementów skończonych są: budowanie układu równań oraz jego rozwiązywanie. Na obecnym etapie tworzenia programu autorskiego oba te etapy są zrównoleglone. Zrównoleglenia wymaga natomiast wiele innych etapów modelowania za pomocą metody elementów skończonych. Najważniejszym z nich jest automatyczne tworzenie siatki elementów skończonych z jednoczesnym podziałem zadania na domeny oraz z zachowaniem równego obciążenia wszystkich procesów. Obecnie do podziału całej siatki elementów skończonych na domeny stosowana jest biblioteka Chaco (Wyrzykowski i in. 1999b).

3.1. Równoległa budowa i rozwiązywanie układów równań

Równoległe budowanie układu równań polega na tworzeniu jego fragmentów na każdym procesorze. Aby zadanie to mogło być zrealizowane należy najpierw podzielić całe zadanie na domeny. Liczba domen jest równa liczbie dostępnych procesorów. W metodzie elementów skończonych domena jest częścią siatki elementów skończonych wraz ze zdefiniowanymi dla niej własnościami materiałowymi oraz warunkami brzegowymi i początkowymi. W każdej domenie węzły dzieli się na:

- wewnętrzne, powiązane jedynie z węzłami własnej domeny,
- graniczne, powiązane jednocześnie z węzłami wewnętrznymi oraz z węzłami należącymi do innych domen,
- zewnętrzne, należące do innych domen, ale powiązane z węzłami brzegowymi bieżącej domeny.

W każdej domenie węzły są lokalnie przenieumerowane. Na początku numeracji znajdują się węzły wewnętrzne, następnie graniczne, a na końcu zewnętrzne. Przenieumerowanie to pozwala na zbudowanie w każdym procesie układu równań o strukturze pokazanej na rys. 5. W celu przyspieszenia obliczeń koniecznych dla zbudowania lokalnych układów równań do każdej domeny można dołączyć współrzędne węzłów zewnętrznych. W trakcie równoległego budowania układu równań, tzn. budowania lokalnych jego frag-

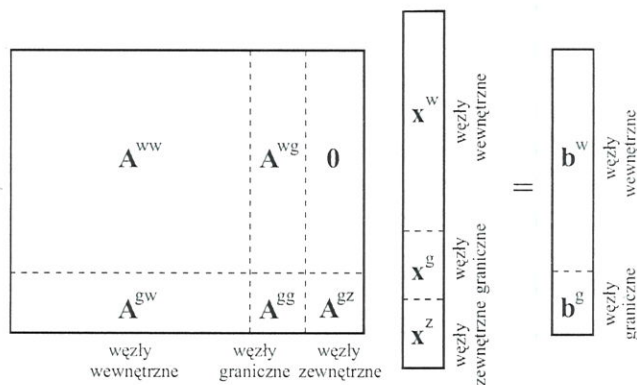
mentów na każdym procesorze, procesy nie muszą się wtedy z sobą komunikować.

W metodzie elementów skończonych otrzymuje się układy równań, w których macierze współczynników są macierzami rzadkimi. Do rozwiązywania układów równań z takimi macierzami najlepiej jest zastosować metody iteracyjne, chociaż w niektórych przypadkach jeszcze krótsze czasy rozwiązywania otrzymuje się stosując metody skończone. Do równoległego rozwiązywania układów równań szczególnie przydatne są metody iteracyjne. Efektywną klasę metod iteracyjnych rozwiązywania dużych układów równań z rzadkimi macierzami współczynników tworzą metody zdefiniowane w przestrzeniach Kryłowa (Saad 1995). Najczęściej stosowanymi przedstawicielami tej klasy są metody:

- sprzężonych gradientów (CG – ang. *Conjugate Gradient Iteration*), używana dla układów równań z symetrycznymi i dodatnio określonymi macierzami współczynników,
- GMRES (ang. *Generalised Minimum Residual Iteration*),
- Bi-CG-STAB (ang. *BiConjugate Gradient Iteration Stabilised*).

Dwie ostatnie używane są dla układów równań z niesymetrycznymi macierzami współczynników. Przyspieszenie działania wszystkich tych metod uzyskuje się poprzez zastosowanie odpowiednich metod poprawy uwarunkowania wstępnego. Użycie odpowiedniej metody poprawy uwarunkowania wstępnego uzależnione jest od typu rozwiązywanego zagadnienia. Najczęściej stosowanymi są metody:

- LSP (ang. *Least-Squares Polynomial*),
- ILU (ang. *Incomplete LU factorisation*),
- SymGS (ang. *Symmetric Gauss-Seidel*).



Rysunek 5. Struktura lokalnego układu równań (indeksy górne oznaczają węzły: w – wewnętrzne, g – graniczne oraz z – zewnętrzne).

3.2. Podstawowe kryteria oceny programów realizowanych wieloprocesorowo

Realizacja równoległa (lub rozproszona) obliczeń jest zagadnieniem bardzo złożonym i stąd nie ma jednego, uniwersalnego kryterium oceny wydajności programów równoległych. Zakładając, że program wykonujący obliczenia na komputerze równoległym lub w systemie rozproszonym dysponuje p procesorami, teoretyczny czas wykonania tych obliczeń powinien być p razy krótszy od czasu wykonania takich samych obliczeń na komputerze jednoprocessorowym. Praktycznie jest to jednak nieosiągalne, a w przypadku małych zadań czas wykonania obliczeń w systemie wieloprocesorowym może być nawet dłuższy od czasu obliczeń w systemie jednoprocessorowym (Wyrzykowski i in. 1999a). Główną przyczyną nie osiągnięcia przyspieszenia teoretycznego jest komunikacja między procesorami. Wydajność programów równoległych i rozproszonych może jednak ulec dalszemu spadkowi ze względu na niezrównoważone obciążenia poszczególnych procesorów i wynikające stąd narzuty na synchronizację obliczeń.

Podstawowym kryterium oceny wydajności programów równoległych i rozproszonych jest przyspieszenie (Wu 1999)

$$S_p = \frac{\tau_1}{\tau_p} \quad (22)$$

gdzie τ_1 jest najlepszym z możliwych (najkrótszym) czasem realizacji obliczeń za pomocą programu sekwencyjnego, natomiast τ_p jest czasem realizacji obliczeń za pomocą programu równoległego. Czas ten jest mierzony od momentu rozpoczęcia obliczeń, aż do chwili, w której ostatni procesor zakończy pracę. W powyższej interpretacji wielkości τ_1 wzór (22) dotyczy przyspieszenia bezwzględnego. Wobec trudności z wyznaczeniem τ_1 w praktyce, w dalszej części niniejszej pracy (por. rys. 16) do oceny τ_1 używany jest czas realizacji obliczeń za pomocą programu sekwencyjnego, opartego na wykorzystaniu tego samego algorytmu numerycznego, co program równoległy.

Na czas wykonania programu równoległego składa się kilka składników

$$\tau_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\tau_{obl}^i + \tau_{kom}^i + \tau_{pos}^i) \quad (23)$$

przy czym τ_{obl}^i jest czasem wykonania obliczeń przez i -ty procesor, τ_{kom}^i jest czasem komunikacji, składającym się z czasu wysyłania i odbierania informacji przez i -ty procesor oraz τ_{pos}^i jest czasem postoju (bezczynności) i -tego procesora.

Innym kryterium oceny jest efektywność wykorzystania procesorów

$$E_p = \frac{S_p}{p} = \frac{\tau_1}{p\tau_p} \quad (24)$$

Kryterium to daje przede wszystkim możliwość zbadania zrównoważenia pracy procesorów (ang. *load balancing*) w wyniku podziału zadania na domeny, dokonywanego w trakcie przygotowywania zadania do rozwiązania.

4. PRZYKŁADOWE SYMULACJE KOMPUTEROWE

4.1. Symulacja na komputerze jednoprocessorowym

Przykładową symulację komputerową krzepnięcia przeprowadzono dla stopu Al-2%Cu, krzepnącego w formie metalowej. Stop ten wybrano, ponieważ charakteryzuje się on szerokim temperaturowym przedziałem krzepnięcia (49 K) oraz na wykresie fazowym znajduje się on stosunkowo daleko od początku przemiany eutektycznej (patrz rys. 3). Przyjęte w obliczeniach wartości własności materiałowych, zaczerpnięte z pracy Sczygiola (2000a), zawarte są w tablicy 1.

Tablica 1. Własności materiałowe.

	faza ciekła	faza stała	forma
ρ , kg/m ³	2498	2824	7500
c , J/kgK	1275	1077	620
λ , W/mK	104	262	40
L , J/kg	390 000		
K	0,125		

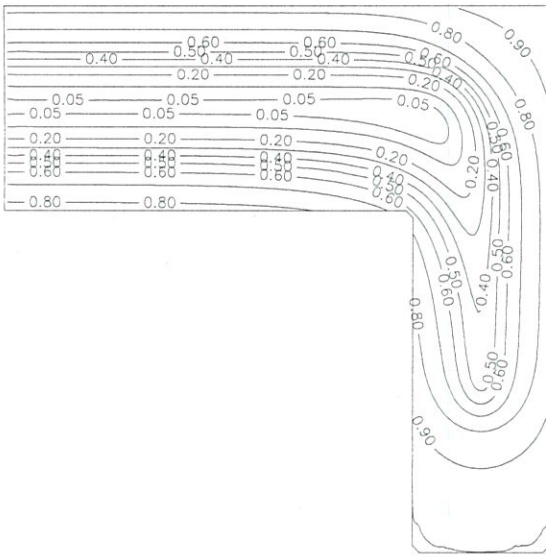
W przedziale od temperatury likwidus do temperatury solidus założono liniową zmienność współczynnika przewodności cieplnej z temperaturą. Temperatury potrzebne dla przeprowadzenia symulacji numerycznej odczytano z wykresu fazowego dla stopów Al-Cu. Wynoszą one: $T_M = 933$ K, $T_L = 926$ K, $T_S = 877$ K oraz $T_E = 821$ K.

Promień ziarna obliczano z zależności (21) ekstrapolowanej do wartości 80 K/s. Zależność ta ma wtedy postać (Sczygiol 2000a)

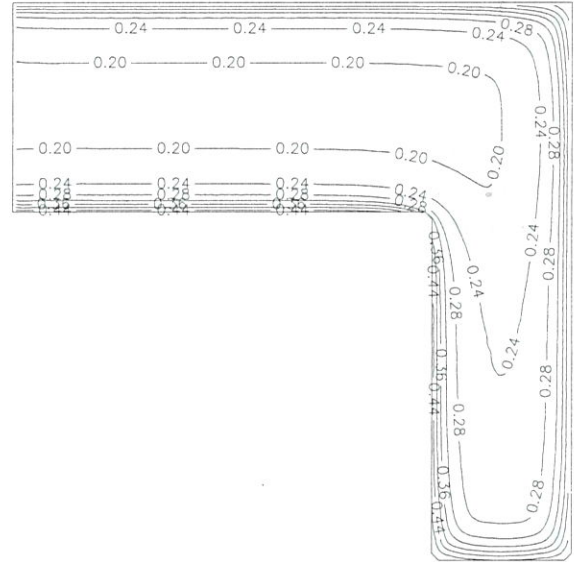
$$r = 0,14 + \ln(\dot{T})^{-0,0315} \quad (25)$$

Temperatura początkowa odlewu wynosiła 960 K, natomiast formy 590 K. Analizowany odlew wraz z formą odlewniczą pokazany jest na rys. 6. Obszar ten podzielono na ok. 7700 trójkątnych elementów skończonych, otrzymując ponad 4200 węzłów, przy czym w odlewie otrzymano 5193 elementy i 2750 węzłów. Na styku odlewu z formą oraz obu części formy zało-

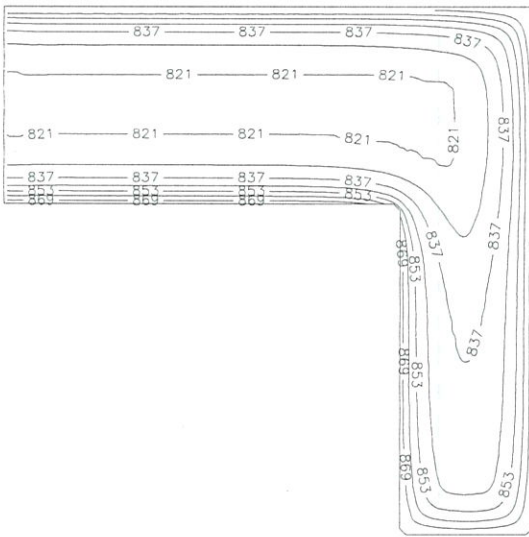




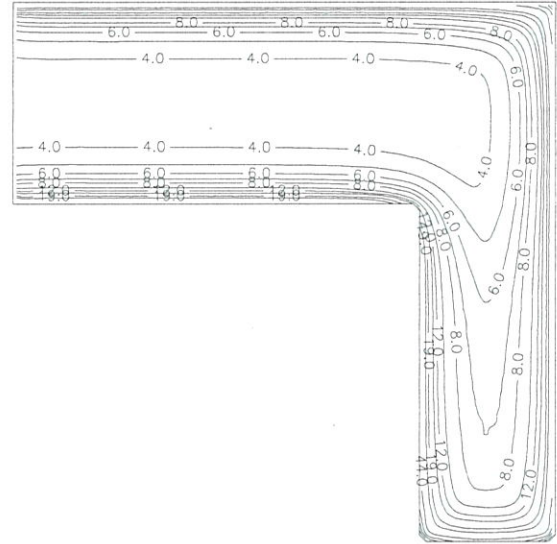
Rysunek 9. Udział fazy stałej po 20 s od zalania.



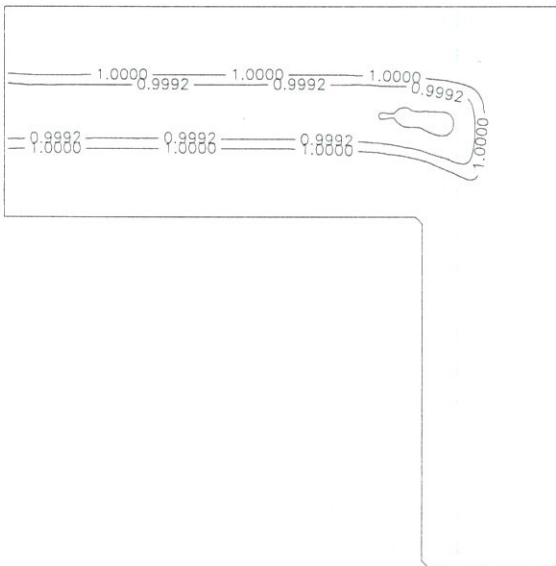
Rysunek 12. Rozkład współczynnika Ω .



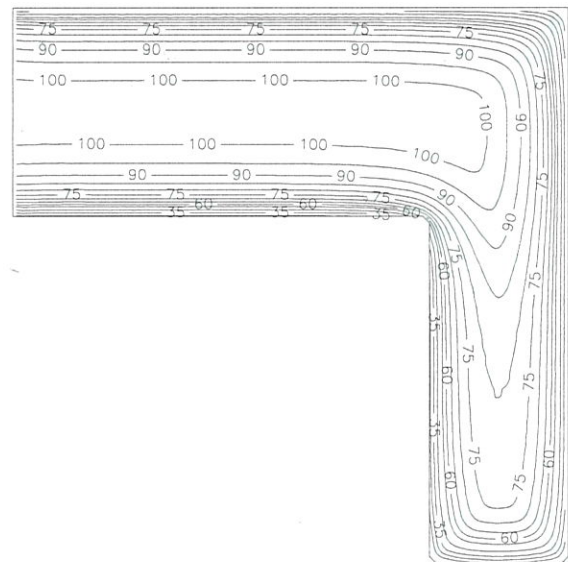
Rysunek 10. Rozkład temperatur końca krzepnięcia, K.



Rysunek 13. Rozkład prędkości stygnięcia, K/s.



Rysunek 11. Rozkład udziałów fazy stałej w chwili osiągnięcia temperatury eutektycznej.



Rysunek 14. Rozkład średnich promieni ziaren, μm .



Innym, ważnym czynnikiem charakteryzującym przebieg krzepnięcia w odlewie jest rozkład współczynnika Ω . W analizowanym odlewie współczynnik ten zmieniał się w granicach od 0,1896 do 0,4968 (rys. 12). Dla stopu Al-2%Cu charakterystyczna wartość współczynnika Ω wynosi 0,1988. W węzłach siatki elementów skończonych, w których $\Omega < 0,1988$, końcowe porcje fazy ciekłej krzepną eutektycznie.

Ze względu na stosunkowo dużą różnicę pomiędzy temperaturą początkową ciekłego metalu i temperaturą początkową formy odlewniczej występują znaczne różnice w uśrednionych prędkościach stygnięcia w chwili osiągnięcia temperatury likwidus (rys. 13). Prędkości stygnięcia zmieniają się w granicach od 3,28 do 181 K/s.

Ponieważ średni promień ziarna jest funkcją prędkości stygnięcia, stąd znaczne zróżnicowanie wielkości ziaren w odlewie (rys. 14). Promienie najmniejszych ziaren, obliczone w węzłach stykających się z kokilą, wynoszą $6,17 \mu\text{m}$, natomiast promienie największych ziaren, wyznaczone w węzłach centrum cieplnego odlewu, tj. obszaru najdłuższej krzepnącego, wynoszą $102,81 \mu\text{m}$.

4.2. Symulacja na klastrze komputerów PC

W Politechnice Częstochowskiej od kilku lat prowadzona jest intensywna działalność naukowa w zakresie zastosowań obliczeń równoległych do modelowania krzepnięcia. Badaniami tymi zajmują się dwa instytuty: Instytut Matematyki i Informatyki oraz Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn. Działalność ta zaowocowała m.in. opracowaniem wersji równoległej modułu pakietu *NuscaS* (Wyrzykowski i in. 1999a, Wyrzykowski i in. 2000a, Wyrzykowski i in. 2001a). O wartości tego opracowania stanowi np. oryginalne wykorzystanie techniki obiektowej do zapewnienia przezroczystości mechanizmów wspierających przetwarzanie równoległe dla twórców oprogramowania aplikacyjnego. Dalsze możliwości rozbudowy pakietu zrównoleglonego, o nazwie *ParallelNuscaS*, pojawiły się z chwilą uruchomienia w Instytucie Matematyki i Informatyki klastra komputerów PC. Klaster ten otrzymał nazwę ACCORD, stanowiącą skrót od *Academic Cluster of Częstochowa for Research and Development* (Wyrzykowski i in. 2001b).

Klaster zbudowano w oparciu o platformy serwerowe firmy INTEL o symbolu ISP2150G. Są one wyposażone w dwa procesory INTEL Pentium III taktowane zegarem 750 MHz. W skład klastra wchodzi 9 serwerów, z których jeden pełni równocześnie rolę stacji zarządzającej. Każdy z serwerów dysponuje 256 MB pamięci RAM, z wyjątkiem stacji zarządzającej, posiadającej 512 MB pamięci RAM. Łączna pojem-

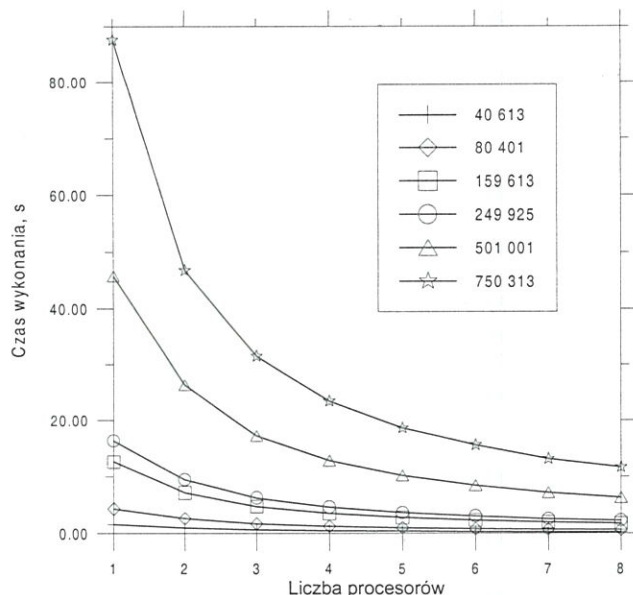
ność pamięci dyskowej klastra wynosi ok. 150 GB. Zastosowano wyłącznie dyski wykorzystujące magistralę SCSI UW2. Serwery zostały połączone za pomocą wysokowydajnej sieci MYRINET. Została ona zaprojektowana specjalnie do budowy systemów klastrów i odznacza się bardzo dużą przepustowością. Ponadto, MERINET charakteryzuje się bardzo dużym współczynnikiem dostępności oraz małym czasem opóźnienia. Pozostałe istotne cechy sieci MYRINET to: wykorzystanie pakietów o dowolnej długości, monitorowanie błędów i dostępności każdego z połączeń oraz bardzo efektywna kontrola przepływu. Oprogramowanie umożliwiające wykorzystanie sieci MYRINET jest dostarczane na zasadach *Open Source*, co umożliwia jego dostosowanie do indywidualnych potrzeb.

W klastrze zbudowanym w Politechnice Częstochowskiej zastosowano przełącznik SAN M2M-SW16 typu *crossbar*, co umożliwia łatwą jego rozbudowę do 16 węzłów, każdy pracujący w architekturze SMP (ang. *Symmetric Multiprocessor*) na dwóch procesorach, a więc docelowo do 32 procesorów. Serwery wchodzące w skład klastra zostały wyposażone w karty MYRINET typu SAN trzeciej generacji zbudowane w oparciu o procesor RISC, 64-bitową magistralę lokalną oraz pamięć o pojemności 2 MB (maks. do 8 MB). Karty te są w stanie transmitować dane z prędkością dorównującą prędkości magistrali PCI o szerokości 64 bitów, czyli ok. 530 MB/s. Dodatkowo, do celów zarządzania klastrem wykorzystany jest protokół Fast Ethernet realizowany na bazie przełącznika 3300 XM firmy 3COM. Umożliwia on dołączenie klastra do sieci POL-34/155, a za jej pośrednictwem do Internetu.

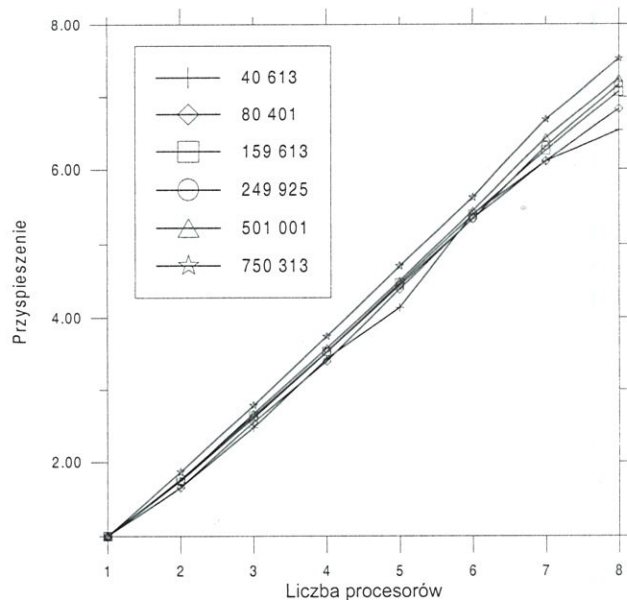
Przykładowe symulacje komputerowe krzepnięcia na klastrze ACCORD przeprowadzono stosując jawne sformułowanie pojemnościowe. Testy przeprowadzono dla sześciu siatek elementów skończonych liczących od ok. 40 tys. węzłów do ok. 750 tys. węzłów, stosując od jednego do ośmiu procesorów. Jako platformę komunikacyjną procesów stosowano PVM.

Do równoległego rozwiązywania układów równań został zaimplementowany algorytm sprzężonych gradientów z jednym punktem synchronizacji. Porównywano czas budowy i rozwiązania układów równań. Uzyskane rezultaty przedstawiono graficznie na kolejnych rysunkach. Zależność czasu jednokrotnej budowy i rozwiązania układu równań od liczby procesorów przy stałym rozmiarze problemu pokazano na rys. 15. W celu lepszego zobrazowania uzyskanych wyników zebrano je dodatkowo w tabeli 2.

Dla wszystkich siatek elementów skończonych otrzymano bardzo dobre przyspieszenia obliczeń (rys. 16). We wszystkich przypadkach są one jednak mniejsze od przyspieszenia teoretycznego. Wzrost liczby



Rysunek 15. Zależność czasu rozwiązania układu równań od liczby procesorów przy stałym rozmiarze problemu.



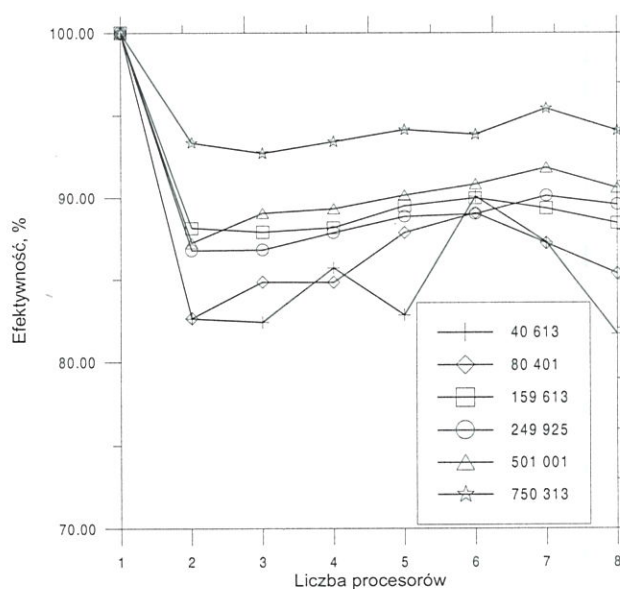
Rysunek 16. Zależność przyspieszenia od liczby procesorów przy stałym rozmiarze problemu.

Tabela 2. Czas rozwiązania układu równań, s.

Liczba procesorów	Liczba niewiadomych (węzłów w siatce ES)					
	40 613	80 401	159 613	249 925	501 001	750 313
1	1,594	4,37	12,626	16,3	45,848	87,456
2	0,965	2,645	7,164	9,394	26,285	46,854
3	0,645	1,717	4,789	6,26	17,163	31,448
4	0,465	1,288	3,581	4,639	12,833	23,409
5	0,385	0,995	2,822	3,67	10,171	18,585
6	0,295	0,818	2,339	3,053	8,413	15,536
7	0,261	0,716	2,019	2,584	7,132	13,094
8	0,244	0,64	1,785	2,275	6,326	11,622

niewiadomych w zadaniu, tzn. wzrost liczby węzłów, powoduje jednak wyraźny wzrost przyspieszenia. Tak, na przykład, w systemie złożonym z $n = 8$ procesorów dla najmniejszej z rozpatrywanej siatek, zawierającej 40 613 węzłów, otrzymano przyspieszenie $S_p = 6,53$, podczas gdy dla największej siatki zawierającej 750 313 węzłów otrzymano już $S_p = 7,53$. Zależność efektywności wykorzystania procesorów od ich liczby pokazana jest na rys. 17. Obserwowane skoki w efektywności dla różnych liczb procesorów wynikają głównie z faktu ich nierównomiernego obciążenia.

Otrzymane wyniki symulacji równoległej procesu krzepnięcia są obiecujące i pozwalają przypuszczać, że tworzony przez nas program komputerowy stanie się w najbliższym czasie narzędziem pozwalającym na efektywne przeprowadzanie symulacji komputerowych krzepnięcia. Program ten stanie się szczególnie przydatny z chwilą uruchomienia symulacji 3D.



Rysunek 17. Zależność efektywności wykorzystania procesorów od ich liczby przy stałym rozmiarze problemu.



5. WNIOSKI

W pracy przedstawiono modele numeryczne służące do numerycznej symulacji krzepnięcia oraz używane na ich podstawie wyniki. Przeanalizowano możliwości symulacji komputerowej tworzącej się struktury ziarnowej. Wskazano, że podstawowe sformułowanie entalpowe pozwala na bezpośrednie uwzględnienie tworzącej się struktury (wielkości ziaren) w symulacjach numerycznych. Zaproponowano sposób oceny średnich wielkości ziaren równoosiowych na podstawie prędkości schładzania w chwili osiągnięcia temperatury likwidus. Przeprowadzono w tym celu badania doświadczalne, w wyniku których znaleziono zależność promienia ziarna od prędkości stygnięcia dla stopu Al-2%Cu. Zastosowano tzw. model pośredni narastania fazy stałej, który w zależności od warunków krzepnięcia daje możliwość otrzymania całej gamy krzywych stygnięcia, od przebiegów charakterystycznych dla krzepnięcia równowagowego do przebiegów charakterystycznych dla krzepnięcia nierównowagowego.

Symulacje komputerowe krzepnięcia przeprowadzono za pomocą autorskich programów komputerowych, działających zarówno na komputerach jednoprocessorowych (*NuscaS*), jak i wieloprocessorowych (*ParallelNuscaS*). Wstępne doświadczenia z wykorzystania klastra ACCORD do przeprowadzenia symulacji komputerowych krzepnięcia pozwalają przypuszczać, że może on stanowić bardzo efektywne narzędzie do przeprowadzania takich symulacji. Jego użycie stanie się nieodzowne z chwilą rozpoczęcia symulacji komputerowych dla zadań 3D, w których liczba węzłów w siatce elementów skończonych osiągać będzie setki tysięcy, a może nawet przekroczyć milion. W takich przypadkach jedynie poprzez zastosowanie przetwarzania równoległego można będzie zredukować czas obliczeń do akceptowalnych przez użytkowników granic. Wstępne testy wskazują, że podstawowym problemem jest tutaj zrównoważenie obciążenia wszystkich procesorów biorących udział w obliczeniach.

LITERATURA

- Buyya, R., 1999, *High performance cluster computing: programming and applications*, vol. 2. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.
- Chen, S.W., Huang, C.-C., 1996, Solidification curves of Al-Cu, Al-Mg and Al-Cu-Mg alloys, *Acta Mater.*, 44, 1955-1965.
- Clyne, T.W., Kurz, W., 1981, Solute redistribution during solidification with rapid solid state diffusion, *Metall. Trans. A*, 12A, 965-971.
- Culler, D.E., Singh, J.P., Gupta, A., 1999, *Parallel Computer Architecture: A Hardware/Software Approach*, Morgan Kaufman Publishers.
- Dahlhijnsen, A.J., Segal, A., 1986, Comparison of finite element techniques for solidification problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23, 1807-1829.
- Foster, I., 1995, *Designing and Building Parallel Programs*, Addison Wesley.
- Ozbayraktar, S., Kousaris, A., 1996, Effect of superheat on the solidification structures of AISI 310S austenitic stainless steel, *Metall. Mater. Trans. B*, 27B, 287-296.
- Parkitny, R., Szczygiol, N., Wyrzykowski, R., Szwarc, G., 2000, Komputerowa symulacja krzepnięcia ziaren równoosiowych – programowanie sekwencyjne i równoległe, *Mat. 7. Konf. KomPlasTech2000*, ed., Kusiak, J., Pietrzyk M., Grosman, F., Piela, A., Krynica, 193-200.
- Saad, Y., 1995, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing, New York.
- Szczygiol, N. 2000a, *Modelowanie numerycznie zjawisk termomechanicznych w krzepącym odlewie i formie odlewniczej*, Praca habilitacyjna, Politechnika Częstochowska.
- Szczygiol, N., 2000b, Approaches to enthalpy approximation in numerical simulation of two-component alloy solidification, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 7, 717-734.
- Szczygiol, N., 2001a, Object-oriented analysis of the numerical modelling of castings solidification, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 8, 79-98.
- Szczygiol, N., 2001b, Modelling of Equiaxed Microstructure Formation in Solidifying Two-Component Alloys, *Lecture Notes in Computer Science*, 1988, 702-709.
- Szczygiol, N., Szwarc, G., 2001, Application of enthalpy formulations for numerical simulation of castings solidification, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 8, 99-120.
- Topping, B.H., Khan, A.I., 1996, *Parallel finite element computations*, Saxe-Coburg Publications, Edinburgh.
- Viet, T.D., Hluchy, L., Giang, N.T., 1999, Data driven graph: a parallel program model for scheduling, *Mat. Konf. PPAM'99*, ed., Wyrzykowski, R., Mochnacki, B., Piech, H., Szopa, J., Częstochowa, 32-42.
- Voller, V.B., Swaminathan, C.R., Thomas, B.G., 1990, Fixed grid techniques for phase change problems: a review, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30, 875-898.
- Wood, W.L., 1990, *Practical Time-stepping Schemes*. Clarendon Press, Oxford.
- Wu, X., 1999, *Performance Evaluation, Prediction and Visualization of Parallel Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- Wyrzykowski, R., Szczygiol, N., Olas, T., 1999a, ParallelNuscaS: An Object-Oriented Software Package for Parallel FEM-Modeling, *Mat. Konf. PPAM'99*, ed., Wyrzykowski, R., Mochnacki, B., Piech, H., Szopa, J., Częstochowa, 499-507.
- Wyrzykowski, R., Szczygiol, N., Olas, T., Kanevski, J., 1999b, Parallel Finite Element Modeling of Solidification Processes, *Lecture Notes in Computer Science*, 1557, 183-195.
- Wyrzykowski, R., Olas, T., Szczygiol, N., 2000a, Parallel Finite Element Modeling on PC-Based Clusters with SMP Nodes, *Mat. Konf. SGI Users' Conference*, Acad. Computer Centre CYFRONET AGH, Kraków, 313-323.
- Wyrzykowski, R., Szczygiol, N., Olas, T., 2000b, Wykorzystanie sieci stacji roboczych do numerycznego modelowania krzepnięcia, *Mat. 7. Konf. KomPlasTech2000*, ed., Kusiak, J., Pietrzyk M., Grosman, F., Piela, A., Krynica, 15-22.
- Wyrzykowski, R., Olas, T., Szczygiol, N., 2001a, Object-Oriented Approach to Finite Element Modeling on Clusters, *Lecture Notes in Computer Science*, 1947, 250-257.
- Wyrzykowski, R., Szczygiol, N., Karczewski, K., Olas, T., Tomasz, A., 2001b, Klaster Obliczeniowy Politechniki Częstochowskiej: Pierwsze Doświadczenia Budowy i Wykorzystania, *Mat. Konf. Polski Internet Optyczny: Technologie, Usługi i Aplikacje - PIONIER 2001*, Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej, Poznań, 103-112.