

## ADAPTACJA SIATEK W MODELOWANIU METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH PROCESÓW PRZEPIYU CIEPŁA

BARBARA GLUT, TOMASZ JURCZYK, MACIEJ PIETRZYK

### *MESH ADAPTATION IN FINITE ELEMENT MODELLING OF HEAT TRANSPORT PROCESSES*

#### *Abstract*

*The paper focuses on the problem of generation of anisotropic meshes and mesh adaptation for simulation of processes using the finite element method. The technique based on the Delaunay triangulation has been modified in order to enable stretching of elements in the selected direction. Application of these meshes allows obtaining a sufficient accuracy of calculations while maintaining the number of elements as low as possible. The proposed approach to the problem of mesh generation and adaptation has been applied to the simulation of the distribution of temperature in the two-dimensional processes of the heat flow.*

### 1. WPROWADZENIE

Pierwszy etap modelowania procesów metodą elementów skończonych polega na dyskretyzacji obszaru, czyli wygenerowaniu siatki elementów. Od jakości siatki w dużym stopniu zależy stabilność, zbieżność, a także jakość obliczeń. Obliczenia inżynierskie są wykonywane w celu otrzymania informacji na temat odpowiedzi danego systemu na nałożone warunki i często informacja ta jest następnie używana do podejmowania decyzji. Obliczenia muszą więc być takiej jakości, jak gdyby rozwiązanie dokładne było znane. Stąd wynika fakt, że obecnie przy modelowaniu procesów metodą elementów skończonych wiele uwagi poświęca się zagadnieniu adaptacji siatek do rozważanego problemu fizycznego. Daży się do kon-

strukcji takiej siatki, która dla danego modelu procesu zapewni wystarczającą precyzję obliczeń przy jednocześnie możliwie najmniejszym koszcie obliczeniowym, tzn. przy możliwie najmniejszej liczbie stopni swobody dyskretyzacji. Liczba stopni swobody zależy od wymiaru problemu, rzędu aproksymacji zagadnienia oraz liczby węzłów i elementów, a więc gęstości siatki. Równomierne, globalne podwyższanie liczby stopni swobody nie musi prowadzić do polepszenia otrzymanego rozwiązania, choćby ze względu na błędy zaokrągleń wynikające z dokładności obliczeniowej komputera.

Zagadnienie precyzji obliczeń związane jest z pojęciem błędu rozwiązania przybliżonego. Rozwiązanie dokładne dla większości zagadnień nie jest znane, stąd istotne jest oszacowanie tego błędu. Jedynie dla

niewielkiej grupy zagadnień znane są oszacowania *a priori* błędu związanego z symulacją procesu metodą elementów skończonych. Ponadto znajomość oszacowania błędu *a priori* niekoniecznie automatycznie oznacza możliwość znalezienia optymalnej siatki. Dla zadanego stopnia aproksymacji oszacowanie to określa bowiem maksymalny rozmiar elementów (tym samym gęstość siatki) w całym obszarze. Tymczasem w rozważanych zagadnieniach zwiększenie liczby stopni swobody (podwyższenie stopnia aproksymacji lub zagęszczenie siatki) może być wymagane tylko lokalnie w niektórych podobszarach, gdzie rozwiązanie najszybciej ulega zmianie lub gdzie występują osłabliwości. Oszacowanie błędu *a priori* pokazuje więc jedynie, jak zmienia się błąd przy zmianie dyskretyzacji i jaki jest rząd zbieżności metody. Aby bardziej precyzyjnie określić błąd, jaki rzeczywiście jest popełniany dla konkretnego zagadnienia obliczeniowego, potrzebna jest dodatkowa informacja. Źródłem tej informacji może być również samo rozwiązanie uzyskane metodą elementów skończonych. Oszacowanie błędu, które wykorzystuje tę informację nazywane jest estymacją błędu *a posteriori*. Poza tym należy wziąć pod uwagę fakt, że dla wielu zagadnień nie jest w ogóle znane oszacowanie błędu *a priori*, dlatego możliwość wyciągnięcia wniosków *a posteriori* o precyzji rozwiązania jest tym cenniejsza i może być jedyną drogą do uściślenia rozwiązania.

Kontrola błędu dyskretyzacji wymaga początkowego wyboru siatki i następnie wprowadzenia sekwencji modyfikacji siatki lub stopnia aproksymacji tak, by osiągnąć żądany poziom precyzji dla otrzymanych z symulacji parametrów procesu. Należy tu zauważyć, że w wielu przypadkach odpowiedzią systemu bardziej interesującą od samego rozwiązania  $u$  są inne parametry zależne od  $u$ . Jako przykład można tu podać zagadnienia sprężystości rozpatrywane w mechanice. Rozwiązanie problemu metodą elementów skończonych pozwala bezpośrednio określić pole przemieszczeń  $u$ . Tymczasem z punktu widzenia inżynierskiego o wiele istotniejsza jest analiza pola odkształceń lub naprężeń, a więc wielkości wynikających z pola  $u$ , związanych z  $u$  relacjami zawierającymi jego pochodne. W ogólności można więc powiedzieć, że procedura adaptacyjna ma doprowadzić do określenia z wystarczającą precyzją pewnych funkcjonatów  $\phi_i(u)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), tzn. tak, by:

$$\left| \frac{\phi_i(u) - \phi_i(u_h)}{\phi_i(u)} \right| \leq \tau_i \quad (1)$$

gdzie  $u$  oznacza rozwiązanie analityczne,  $u_h$  – rozwiązanie przybliżone, a  $\tau_i$  – zadaną tolerancję.

Przy czym niestety mały błąd dla któregoś z funkcjonatów  $\phi_i(u)$  nie gwarantuje, że pozostałe funkcjo-

nały obliczane są z równie dobrą precyzją. Zależy to od regularności rozwiązania przybliżonego, na postawie którego na ogół są one określane, jak również od wyboru normy, w której precyzja jest mierzona oraz ogólnie od sposobu mierzenia precyzji.

Problem kontroli rozwiązania wiązany jest często z dwoma pojęciami: estymatorem błędu traktowanym jako globalna miara precyzji określonych parametrów oraz wskaźnikiem błędu tj. lokalną miarą tej precyzji. Na ogół modyfikacje siatki pilotowane są przez wskaźnik błędu, a kryteria stopujące procedurę przez estymator błędu. Istnieje wiele typów estymatorów. W chwili obecnej dostępna jest dość już bogata literatura na ten temat. Na przykład w pracy Ainswortha i Odena (1997) można znaleźć opis najczęściej wykorzystywanych estymatorów.

Celem niniejszej pracy nie jest formalna estymacja błędu, problem ten został więc przedstawiony jedynie skrótowo. Zasadnicze rozważania przedstawione poniżej dotyczą bardziej techniki adaptacji, tj. sposobu generowania siatek zaadaptowanych.

## 2. SCHEMAT ADAPTACJI SIATEK

W procesach rozpatrywanych jako stacjonarne, w symulacji których zauważono potrzebę adaptacji siatki, sposób postępowania może być następujący:

- utworzenie siatki początkowej, która respektuje jedynie geometrię obszaru,
- obliczenie pierwszego rozwiązania przybliżonego i estymacja błędu,
- dopóki rozwiązanie dla zadanej dyskretyzacji obszaru nie jest satysfakcjonujące:
  - 1) zaadaptowanie siatki,
  - 2) znalezienie kolejnego rozwiązania przybliżonego.

Testem zakończenia procedury iteracji może być wystarczająca zbieżność wielkości globalnej lub lokalnej oraz ze względów informatycznych również czas obliczeń lub zajętość pamięci.

Siatka zostaje więc zmodyfikowana w podobszarze, dla którego rozwiązanie nie jest zadowalające. Adaptacja siatki (punkt 1) może być prowadzona w taki sposób, że lokalnie zostaje podwyższona liczba stopni swobody z zachowaniem dyskretyzacji w pozostałych podobszarach, albo tworzona jest całkowicie nowa dyskretyzacja na podstawie informacji uzyskanych z poprzedniej iteracji procedury adaptacyjnej. Dla konkretnych procesów fizycznych problemem pozostaje sposób wyznaczania podobszarów siatki do modyfikacji i odpowiedni dobór metody adaptacyjnej.

Techniki adaptacji siatek dzieli się często na cztery grupy:



- ♦ *r-metody*: liczba węzłów siatki i połączenia między węzłami pozostają niezmiennione, natomiast węzły siatki zostają przemieszczone (*re-positioning*),
- ♦ *h-metody*: zagęszczanie globalne lub lokalne siatki (zmiana rozmiaru  $h$  elementu),
- ♦ *p-metody*: podwyższenie rzędu funkcji kształtu,
- ♦ *hp-metody*: jednoczesne zagęszczanie siatki i podwyższenie stopnia aproksymacji.

Szersze omówienie, która z tych klasycznych metod adaptacji dyskretyzacji daje najlepsze rezultaty dla jakiego rodzaju zagadnienia, można znaleźć w pracy Szabo i Babuški (1991).

Zaprezentowany podział jest adekwatny dla technik generujących siatki izotropowe, których elementy są możliwie najbardziej zbliżone do wielokątów foremnych. Metody te są szeroko rozpowszechnione, bo pozwalają stosunkowo łatwo uniknąć degeneracji elementów, a ponadto z punktu widzenia teoretycznego elementy równoboczne są stosowane przy szacowaniu błędu a priori. Jednakże istnieją procesy, gdzie użycie w symulacji siatek anizotropowych, tj. wydłużonych w pewnym kierunku, daje bardzo dobre rezultaty. Jedną z pierwszych publikacji prezentujących możliwości zastosowania siatek wydłużonych była praca Peraire i in. (1987). Dało to początek nowym technikom adaptacji siatek, które kontrolują nie tylko rozmiar elementów, ale także sposób ich wydłużenia w zadanym kierunku. Nie wszystkie z tych metod podlegają już podanej powyżej klasyfikacji. Można je ewentualnie zakwalifikować do *h*-metod, jeśli zmianę rozmiaru elementów traktować w sposób ogólny. Tak też będzie rozumiana *h*-metoda w dalszej części pracy.

Przy generowaniu nowej zaadaptowanej siatki wygodnie jest dla opisu kryteriów wprowadzić *przestrzeń kontrolną*  $D$  (George, Borouchaki 1997). Formalnie  $D$  jest jakimkolwiek pokryciem obszaru  $\Omega$ , podzielonym na podobszary. Każdy z nich zawiera informacje o warunkach, jakie spełniać ma dyskretyzacja w jego wnętrzu (maksymalna długość krawędzi, forma elementów, ograniczenia kątowe itp.). Na przykład, w *h*-metodzie można zadać w przestrzeni kontrolnej tzw. funkcję rafinacji  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ , która daje oczekiwany rozmiar elementu w funkcji jego położenia w  $\Omega$ , przy czym rozmiar  $h(x)$  może oznaczać maksymalną długość krawędzi lub średnicę elementu zawierającego  $x$ . Generator tworząc nową siatkę lub dodając nowe elementy odwołuje się do danych zawartych w poszczególnych podobszarach przestrzeni kontrolnej. Przestrzeń kontrolna może być trzech rodzajów: z podziałem na podobszary regularne, z podziałem o strukturze drzewa lub z podziałem zgodnie z siatką z poprzedniej iteracji.

Przestrzeń kontrolna zaproponowana przez Vallet (1992) pozwala kontrolować lokalnie rozmiar i wydłużenie elementów trójkątnych, co daje możliwość generowania siatek anizotropowych. Tego typu przestrzeń kontrolna zawierać musi wskazówki dotyczące wydłużenia elementów (kierunek i amplituda). Vallet wykazuje, że problem konstrukcji elementów wydłużonych można sprowadzić do generowania siatki izotropowej poprzez zmianę metryki w podobszarach przestrzeni kontrolnej. Jeżeli w danym dwuwymiarowym podobszarze żąda się, aby trójkąty miały ten sam rozmiar oraz wydłużenie co dany niezdegenerowany element  $\Delta$ , wystarczy znaleźć metrykę  $M$  wprowadzoną przez iloczyn skalarny, w której  $\Delta$  jest równoboczny o boku 1, a następnie skonstruować w podobszarze siatkę izotropową w zadanej metryce. Iloczyn skalarny wyrażony jest w formie  $(x,y) = x^T M y$ , gdzie  $M$  jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną. W przestrzeni dwuwymiarowej można  $M$  przedstawić w postaci:

$$M = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R^{-1} \quad (2)$$

gdzie:  $\lambda_1, \lambda_2$  – wartości własne  $M$ ,

$R$  – macierz rotacji o kąt  $\alpha$ , który obraca wektory bazy w 2D na wektory własne  $M$ .

Oznacza to, że zadanie metryki sprowadzić można do podania parametrów  $(\alpha, \lambda_1, \lambda_2)$ . Trójkąty równoboczne o boku 1 dla tej metryki mają jako długości charakterystyczne  $1/\sqrt{\lambda_1}$  w kierunku kąta  $\alpha$  oraz  $1/\sqrt{\lambda_2}$  w kierunku prostopadłym do  $\alpha$ . Kontrola zapewniona przez tak wprowadzoną metrykę dotyczy rozmiaru (poła) i wydłużenia elementów, nie dotyczy natomiast kątów (nie zachowuje kątów).

Ta idea została wykorzystana w prezentowanej metodzie generowania siatek.

### 3. GENEROWANIE SIATEK ANIZOTROPOWYCH

Metodę tworzenia siatek anizotropowych zaimplementowano modyfikując odpowiednio opracowany przez autorów generator dwuwymiarowych siatek trójkątnych. Generator ten działa w oparciu o metodę triangulacji Delaunay'a (ed. Thomson i in. 1999 lub George, Borouchaki 1997). Tworzone siatki mogą być również siatkami anizotropowymi, jeśli zostanie zadana odpowiednia metryka. Ponadto istnieje również możliwość konwersji siatki trójkątnej na czworokątną i to zarówno w odniesieniu do siatek izotropowych jak i anizotropowych. Opis zastosowanych algorytmów generacji siatek izotropowych znaleźć można w pracy Jurczyka i Głut (2001), a ich efektywność oraz



jakość generowanych siatek omawiają publikacje Głut i in. (2000 a,b).

### 3.1. Wprowadzenie metryki i jej interpolacja w obszarze

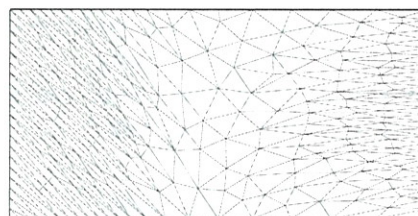
W chwili obecnej w generatorze zastosowano następujący sposób tworzenia siatek anizotropowych. W izolowanych punktach zadawane są trzy parametry ( $\alpha$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ) określające metrykę  $M_i$ . Kąt  $\alpha$  określa kierunek wydłużenia elementów, a  $l_1$ ,  $l_2$  są pożądanymi długościami elementów odpowiednio wzdłuż zadanego kierunku i prostopadle do niego. Na podstawie metryki określonej w zadanych punktach przybliżony jest rozkład metryki  $M$  w całym triangulowanym obszarze. Interpolacja parametrów metryki jest wykorzystywana zarówno w trakcie uzupełniania wartości w węzłach przestrzeni kontrolnej, jak i w trakcie triangulacji – w celu określenia metryki dla dowolnego punktu na podstawie znajomości metryki w wierzchołkach istniejącej już przestrzeni kontrolnej.

Sporym utrudnieniem jest tu jednak niejednoznaczność interpolacji, która może być obliczana w oparciu o różne kryteria. Obecnie zaimplementowano dwie metody interpolowania metryki nazwane: *średnie wydłużenie* i *średnia macierz*. W pierwszej z nich metryka w dowolnym punkcie jest aproksymowana jako średnia z wydłużeń i kątów węzłów sąsiednich w przestrzeni kontrolnej. W drugiej metodzie metryki są sprowadzane do postaci macierzowej. Na tej podstawie wyznaczana jest macierz w dowolnym punkcie, z której są następnie wyliczane wydłużenia i kąt. Efekty zastosowania obu rodzajów interpolacji ilustruje rysunek 1. Przedstawiono na nim siatki powstałe w wyniku wprowadzenia w obszarze dwóch punktów z zadaną metryką. W przypadku (a) zastosowano algorytm 1, a w (b) algorytm 2. W środku obszaru różnice w triangulacji są znaczące. Algorytm 2 daje siatki, w których wydłużenie i kierunek wydłużenia elementów zmieniają się w sposób bardziej „płynny”, ale w których liczba elementów jest większa. Wybór metody interpolacji metryki może być zatem podyktowany potrzebami użytkownika.

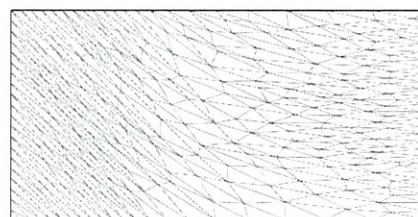
Różnice w triangulacji dla obu algorytmów są dużo mniej widoczne, gdy wzrasta liczba punktów z zadaną metryką, co pokazuje rysunek 2. Te siatki uzyskano wykorzystując technikę adaptacji opisaną poniżej. Liczba punktów z zadaną metryką jest tutaj taka, jak liczba węzłów siatki z poprzedniej iteracji.

### 3.2. Przestrzeń kontrolna

Zaimplementowana struktura przestrzeni kontrolnej może być dwojaka: regularna siatka prostokątna

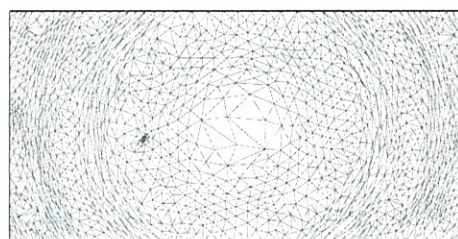


(a) średnie wydłużenie

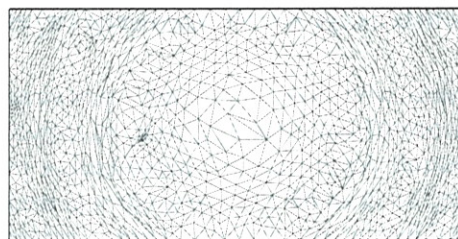


(b) średnia macierz

Rysunek 1. Siatki generowane dla różnych metod interpolacji metryki (dla dwóch zadanych punktów z metryką).



(a) średnie wydłużenie - 2712 elementów



(b) średnia macierz - 2721 elementów

Rysunek 2. Siatki generowane dla różnych metod interpolacji metryki (dla zbioru punktów z metryką).

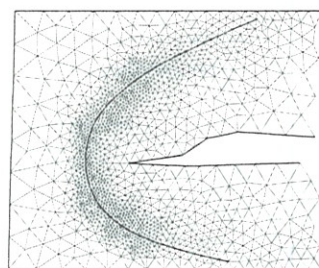
oraz drzewo. Regularna siatka prostokątna obejmuje cały obszar triangulacji i składa się z jednakowych prostokątów. Gęstość siatki jest zależna od stosunku szerokości (i odpowiednio wysokości) triangulowanego obszaru do najkrótszej długości elementu (obliczonej według metryki w zadanych punktach). Zaletą tego rozwiązania jest równomierny rozkład parametrów metryki, wadą – stosunkowo duży rozmiar i czas interpolacji dla obszarów z lokalnie dużym zagęszczeniem elementów.

Dla drugiego rodzaju przestrzeni kontrolnej drzewo definiowane jest początkowo jako jeden prostokąt obejmujący cały obszar. W miarę dodawania zdefiniowanych punktów jest ono dzielone tak, aby żadne

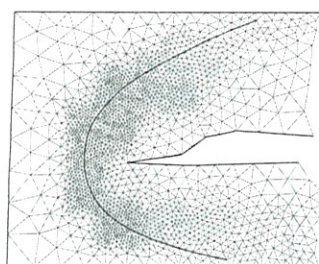


dwa punkty należące do wspólnego liścia drzewa nie różniły się bardziej niż zadany próg.

Efekty zastosowania tych dwóch rodzajów przestrzeni kontrolnej ilustruje rysunek 3.



(a) regularna siatka



(b) drzewo

Rysunek 3. Siatki generowane z wykorzystaniem różnych struktur przestrzeni kontrolnej.

### 3.3. Konstrukcja siatek anizotropowych

Siatka anizotropowa, tworzona w przestrzeni z nie-euklidesową (Riemannowską) metryką, przechodzi po zastosowaniu odpowiedniej transformacji w jednorodną siatkę, która może być konstruowana według metod charakterystycznych dla przestrzeni euklidesowej. Wystarczy zauważyć, że po dokonaniu odpowiedniej interpolacji metryki w całym obszarze, możliwa jest transformacja współrzędnych dowolnego punktu z metryki euklidesowej  $E(0, 1, 1)$  do metryki  $M(\alpha, l_1, l_2)$  oraz transformacja odwrotna. Można zatem również dokonywać oceny pewnych kryteriów wykorzystywanych w generacji siatek mierząc odpowiednie wielkości w metryce  $M$ .

Dystrybucja węzłów na brzegu obszaru ma istotny wpływ na jakość generowanych siatek. Zastosowana metoda polega na iteracyjnym rozmieszczaniu węzłów z uwzględnieniem zadanej metryki.

W metodach opartych o triangulacje Delaunay'a duże znaczenie dla jakości siatki ma też sposób wprowadzania węzłów wewnętrznych. Węzły wewnętrzne są automatycznie generowane tak, aby zapewnić możliwie najlepszą jakość siatki. Algorytm wybiera aktualnie "najgorszy" z trójkątów występujących w trian-

gulacji. Następnie dobiera współrzędne nowego punktu wstawianego potem do triangulacji. Możliwych jest do wyboru kilka kryteriów oceny jakości trójkątów, jak i kilka sposobów lokalizacji nowo wstawianego węzła (Głut i in. 2000 a,b). Jeśli w generatorze zastosowana jest przestrzeń kontrolna z metryką, wszystkie współczynniki jakości używane podczas triangulacji węzłów wewnętrznych wyliczane są w metryce zdefiniowanej dla punktu środka masy trójkąta. Należy zaznaczyć, że przy zastosowaniu metryki oczekiwane pole każdego trójkąta w jego lokalnej metryce jest równe  $\sqrt{3}/4$  (pole powierzchni trójkąta równobocznego o długości boku 1). Nowe węzły można wstawiać pośrodku najdłuższej krawędzi trójkąta, wewnątrz tego elementu lub w środku okręgu opisanego na danym trójkącie. Przed wyznaczeniem współrzędnych nowego punktu, wierzchołki korygowanego trójkąta poddawane są transformacji odwrotnej zgodnie z lokalną metryką. Następnie dla tak zmienionych wierzchołków wyznaczana jest pozycja nowego punktu, który musi być jeszcze poddany transformacji do lokalnej metryki. Przy generowaniu węzłów wewnętrznych wykorzystując różne kryteria jakości trójkątów oraz różnie umieszczając nowy węzeł w najgorszym elemencie, otrzymać można różne jakościowo siatki.

### 4. METRYKA DEFINIOWANA W OPARCIU O HESJAN

Dla celów adaptacji siatki metrykę związane z hesjanem rozwiązania. Drugie pochodne często występują w oszacowaniach błędów a priori. Hesjan wykorzystywany jest także w estymacji błędów a posteriori oraz w konstrukcji siatek anizotropowych (Almeida i in. 2000, Buscaglia i Dari 1997, Dolejsi 1998, Nithiarasu i Zienkiewicz 2000). W cytowanych pracach do aproksymacji hesjanu wykorzystywane są jednakże funkcje kształtu.

W przyjętym przez autorów rozwiązaniu hesjan jest aproksymowany dyskretnie przez ilorazy różnicowe. Główną zaletą jest to, że pochodne cząstkowe są w węzłach siatki przybliżane odpowiednimi kombinacjami liniowymi wartości wybranego parametru adaptacji w sąsiednich węzłach siatki. (Nie jest więc konieczny dostęp do kodu programu symulacyjnego.) Zastosowany sposób dyskretniej aproksymacji pochodnych ilorazami różnicowymi na siatce o dowolnej konfiguracji węzłów opisany jest dokładnie w pracy Głut (1983). Poniżej przedstawiono główną ideę aproksymacji drugich pochodnych w przestrzeni dwuwymiarowej.

Niechabrany parametr adaptacji  $u$  będzie funkcją skalarną dwóch zmiennych rzeczywistych. Dla aproksymacji pochodnych w węzle  $A_0$  wybieramy  $p$



węzłów siatki (spośród możliwie najbliższych sąsiadów). Wektor  $A_0 A_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) oznaczamy przez  $h_i$ , zaś jego współrzędne przez  $(h_{ix}, h_{iy})$ . W dalszym ciągu zakładamy, że funkcja  $u$  jest na tyle regularna, że można napisać równości wynikające ze wzoru Taylora:

$$u_i = u_0 + \sum_{j=1}^s \frac{1}{j!} \left( h_{ix} \frac{\partial}{\partial x} + h_{iy} \frac{\partial}{\partial y} \right)^j u_0 + R_{is}, \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, p$$

gdzie:

$$u_i = u(A_i) \quad i = 0, 1, \dots, p$$

$$R_{is} = \frac{1}{(s+1)!} \left( h_{ix} \frac{\partial}{\partial x} + h_{iy} \frac{\partial}{\partial y} \right)^{s+1} u(A_0 + \theta_i h_i) \quad 0 < \theta < 1$$

Zadanie w tej części można sformułować następująco: mając dane wartości funkcji w węzłach  $A_0, A_1, \dots, A_p$  znaleźć taką aproksymację różnicową zależną od  $u_0, u_1, \dots, u_p$ , która przybliży zadaną pochodną cząstkową funkcji  $u$  w punkcie  $A_0$  z dokładnością rzędu  $r$ . Innymi słowy, dla pochodnej drugiego rzędu znaleźć takie funkcje  $f_{2mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ), które są funkcjami liniowymi zmiennych  $u_0, u_1, \dots, u_p$  i spełniają zależność:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{2-m} \partial y^m} u(A_0) - f_{2m}(u_0, u_1, \dots, u_p) = O(h^r), \quad (4)$$

$$m = 0, 1, 2$$

gdzie:

$$h = \max_{1 \leq i \leq p} \|h_i\|$$

Wiadomo, że rząd aproksymacji pochodnych jest zależny od liczby węzłów i ich konfiguracji oraz, że zadany rząd dokładności aproksymacji determinuje liczbę węzłów. Dla rzędu dokładności  $r$  oraz drugiej pochodnej w 2D należy przyjąć liczbę węzłów:

$$p = \frac{(2+r)^2}{2} + \frac{2+r}{2} - 1 \quad (5)$$

Wypisujemy wzór Taylora dla  $p$  punktów różnych od punktu  $A_0$ . We wzorze przyjmujemy  $s = r + 1$  tak, aby  $R_{is} = O(h_i^{2+r})$ , czyli by w efekcie uzyskać zadany rząd dokładności  $r$ . Każde z otrzymanych równań mnożymy przez  $\alpha_i$ , a następnie wszystkie równania sumujemy stronami. W rezultacie otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i = u_0 \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{r+1} \frac{\alpha_i}{j!} \left( h_{ix} \frac{\partial}{\partial x} + h_{iy} \frac{\partial}{\partial y} \right)^j u_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i O(h_i^{2+r}) \quad (6)$$

Zauważmy, że rozwiążemy zadanie, jeżeli potrafimy tak dobrać stałe  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), aby  $\sum_{i=1}^p \alpha_i > 0$  oraz by we wzorze wystąpiła jedynie szukana pochodna.

Dla pochodnej  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^{2-m} \partial y^m}$  ( $m = 0, 1, 2$ ) jest to równoważne rozwiązaniu układu równań liniowych:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i h_{ix}^{n-k} h_{iy}^k = b_j \quad j = 1, \dots, p \quad n = 1, \dots, r+1$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

$$b_j = \begin{cases} m!(2-m)! & \text{dla } n = 2, k = m \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (7)$$

gdzie przy zadanej konfiguracji węzłów niewiadomymi są  $\alpha_i$ .

Np. dla pochodnej  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  aproksymowanej przy wykorzystaniu dziewięciu sąsiednich węzłów układ równań wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} h_{1,x} & h_{2,x} & \dots & h_{9,x} \\ h_{1,y} & h_{2,y} & \dots & h_{9,y} \\ h_{1,x}^2 & h_{2,x}^2 & \dots & h_{9,x}^2 \\ h_{1,x}h_{1,y} & h_{2,x}h_{2,y} & \dots & h_{9,x}h_{9,y} \\ h_{1,y}^2 & h_{2,y}^2 & \dots & h_{9,y}^2 \\ h_{1,x}^3 & h_{2,x}^3 & \dots & h_{9,x}^3 \\ h_{1,x}^2h_{1,y} & h_{2,x}^2h_{2,y} & \dots & h_{9,x}^2h_{9,y} \\ h_{1,x}h_{1,y}^2 & h_{2,x}h_{2,y}^2 & \dots & h_{9,x}h_{9,y}^2 \\ h_{1,y}^3 & h_{2,y}^3 & \dots & h_{9,y}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{xx} \\ \alpha_2^{xx} \\ \alpha_3^{xx} \\ \alpha_4^{xx} \\ \alpha_5^{xx} \\ \alpha_6^{xx} \\ \alpha_7^{xx} \\ \alpha_8^{xx} \\ \alpha_9^{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

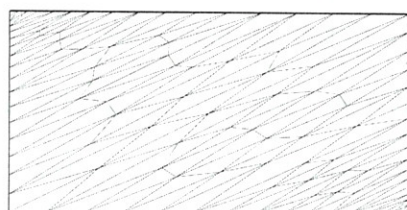
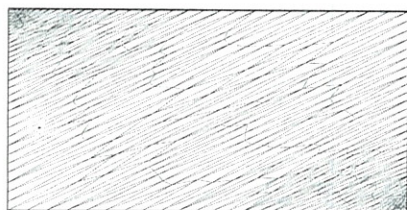
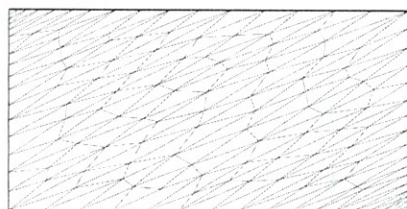
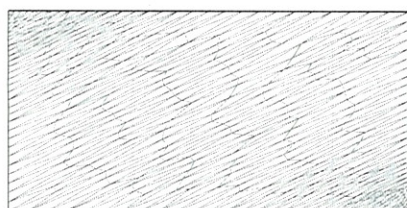
Należy zauważyć, że tak przybliżony hesjan nie zawsze jest dodatnio określony. Do dalszych rozważań wykorzystywane są jednak jedynie wartości bezwzględne z wartości własnych macierzy.

Po wyznaczeniu hesjanu, wyliczane są jego wartości własne oraz wektory własne. Na ich podstawie określany jest kąt  $\alpha$  oraz wydłużenia  $l_1$  i  $l_2$ . Kąt wyznaczany jest zgodnie z kątem wektorów własnych, a wydłużenia według wzoru:

$$l_1 = \frac{A}{\sqrt{\lambda_1}} \quad l_2 = \frac{A}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (9)$$

Parametr  $A$  określany jest przez użytkownika. Odpowiedni dobór  $A$  pozwala konstruować siatki o mniejszym lub większym wydłużeniu (proporcjonalnie w obu kierunkach głównych). Fakt ten ilustruje rysunek 4. Wprowadzono także dwa ograniczenia  $l_{max}$  i  $l_{min}$ . Zabezpieczają one przed tworzeniem elementów zbyt małych lub zbyt wydłużonych (w jednym kierunku głównym).



(a)  $A = 1/8, l_{min} = 0.2\%, l_{max} = 30\%$ (b)  $A = 1/16, l_{min} = 0.2\%, l_{max} = 30\%$ (c)  $A = 1/8, l_{min} = 1\%, l_{max} = 20\%$ (d)  $A = 1/16, l_{min} = 1\%, l_{max} = 20\%$ 

Rysunek 4. Siatki generowane dla różnych parametrów aproksymacji metryki.

Poszczególne kroki generowania siatki zaadaptowanej ilustruje rysunek 5. Załóżmy, że zadana jest powierzchnia rozwiązania (rys. 5a). Na jej podstawie wyliczany jest hesjan oraz metryka w węzłach siatki (rys. 5b), a następnie generowana jest siatka zaadaptowana (rys. 5c).

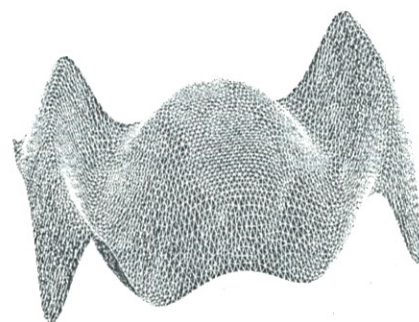
## 5. PRZYKŁADY

### 5.1. Rozwiązanie dla znanej funkcji

Opracowana metoda adaptacji siatki testowana była najpierw dla znanego rozwiązania. Rozpatrywana była funkcja:

$$u(x, y) = (1 - x^{20})(1 - y^{10}), \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1] \quad (10)$$

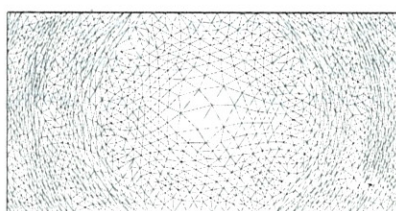
Siatki uzyskiwane w kolejnych krokach adaptacji przedstawione zostały na rysunkach 6 i 7. Gdy procedura adaptacyjna startowała z rzadkiej siatki, po kilku



(a) powierzchnia rozwiązania



(b) wydłużenia w węzłach siatki



(c) wygenerowana siatka zaadaptowana

Rysunek 5. Kroki generowania siatki zaadaptowanej.

iteracjach uzyskiwano siatki o około 860-880 elementach. W następnych krokach obserwowano jedynie niewielkie oscylacje liczby elementów. W przypadku, gdy zaczynano adaptację od gęstej siatki, procedura powodowała rozgęszczenie siatki i już w drugim kroku liczba elementów była zbliżona do 880. Podobnie jak poprzednio w kolejnych krokach liczba elementów stabilizowała się i to na poziomie podobnym do tego dla siatki rzadkiej.

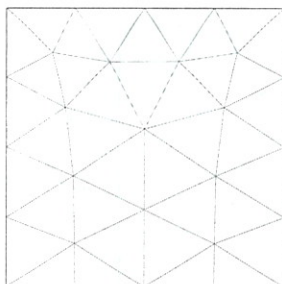
### 5.2. Stacjonarny przepływ ciepła

Modelowanie pól temperatury  $T$  prowadzono w oparciu o rozwiązanie metodą elementów skończonych (Zienkiewicz i Taylor 1989) równania transportu ciepła:

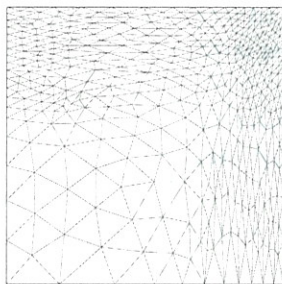
$$\nabla k(T) \nabla T + Q(T) = c_p(T) \rho(T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

gdzie:  $k(T)$  – współczynnik przewodzenia ciepła,  $Q(T)$  – moc wewnętrznego źródła ciepła, w rozważanych przypadkach związana z ciepłem przemian fazowych,

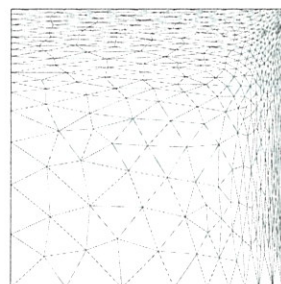




(a) pierwszy krok - 38 trójkątów

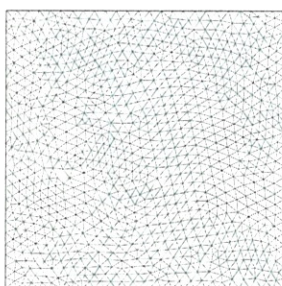


(b) drugi krok - 806 trójkątów

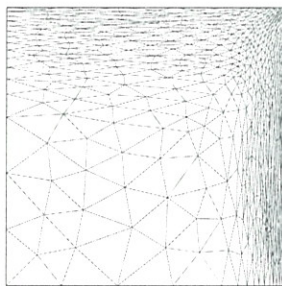


(c) ostatni krok - 881 trójkątów

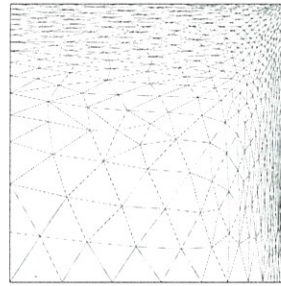
Rysunek 6. Adaptacja z zagęszczaniem siatki.



(a) pierwszy krok - 1916 trójkątów



(b) drugi krok - 886 trójkątów



(c) ostatni krok - 855 trójkątów

Rysunek 7. Adaptacja z rozgęszczaniem siatki.

$\rho(T)$  – gęstość,  $c_p(T)$  – ciepło właściwe,  $t$  – czas.

W poniższych przykładach zadawano następujące warunki brzegowe:

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = q \quad (12)$$

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T)(T_0 - T) \quad (13)$$

gdzie:

$\alpha$  – współczynnik wymiany ciepła,

$T_0$  – temperatura otoczenia,

$q$  – strumień ciepła przez brzeg,

$\mathbf{n}$  – wektor jednostkowy normalny do powierzchni.

W pierwszej kolejności rozwiązano równanie (11) dla stanu stacjonarnego, przyjmując prawą stronę równą zero. Ponadto przyjęto współczynnik przewodzenia ciepła jako niezależny od temperatury, co daje w efekcie równanie liniowe. Także współczynnik wymiany ciepła występujący w warunkach brzegowych był stały oraz nie występowały wewnętrzne źródła ciepła.

Dla stacjonarnego przepływu ciepła symulacja była przeprowadzona z wykorzystaniem 3-węzłowych elementów trójkątnych oraz czworokątnych elementów 4-węzłowych.

Ze względu na liniowość rozpatrywanego zagadnienia przepływu ciepła, wypukłość powierzchni rozwiązania wynika jedynie z geometrii obszaru i nało-

żonych warunków brzegowych. Starano się więc dobrać takie przykłady, na których łatwo można by przeprowadzić testy, ale w rozwiązaniu których istniałyby obszary o pewnej wypukłości rozwiązania. Prezentowane przykłady dla stanu stacjonarnego ilustrują jedynie możliwości, które dają siatki zaadaptowane i nie przedstawiają symulacji dla żadnego rzeczywistego procesu.

Obszar obliczeń dla przykładu pierwszego przedstawiono na rysunku 8. Na rysunku zaznaczone zostały linie  $L_i$ , wzdłuż których porównywano wyniki uzyskane w obliczeniach prowadzonych na różnych siatkach.

Zadano następujące warunki brzegowe: na brzegu całego obszaru – warunek (12) z  $q = 0$  [W/m<sup>2</sup>], na brzegu lewej dziury – warunek (13) z  $\alpha = 100$  [W/m<sup>2</sup>K] i  $T_0 = 1300^\circ\text{C}$ , na brzegu prawej dziury także warunek (13) z  $\alpha = 6000$  [W/m<sup>2</sup>K] i  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Współczynnik  $k$  dla górnego podobszaru jest 2 razy większy niż dla dolnego.

W tym przypadku obliczenia przeprowadzono dla trzech siatek:

- ♦ Siatka 1: gęsta (rys. 10a) o 7708 elementach,
- ♦ Siatka 2: zgrubna (rys. 10b) o 1250 elementach,
- ♦ Siatka 3: zaadaptowana (rys. 10c) o 1630 elementach.

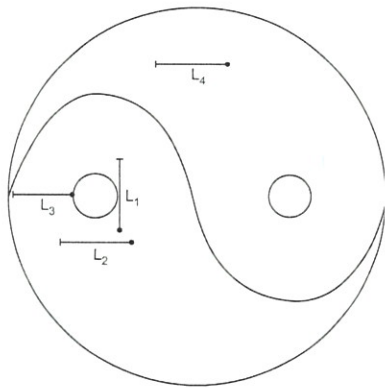
Dla konstrukcji siatki 3 zadano około 20 punktów z metryką. Punkty te zostały zadane arbitralnie po za-



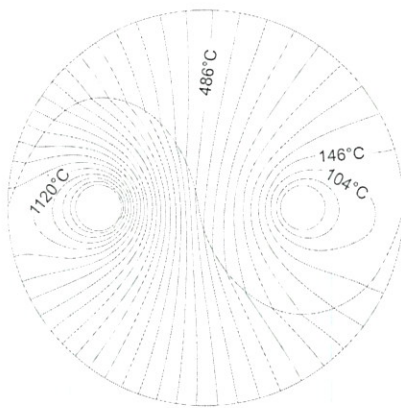


poznaniu się z rozwiązaniem na siatce gęstej. Izolinie temperatury dla tego przykładu obliczonego na siatce gęstej pokazano na rysunku 9.

Rysunek 11a ilustruje różnice w temperaturze dla obszaru o dużej wypukłości rozwiązania. Temperatu-



Rysunek 8. Obszar obliczeń.

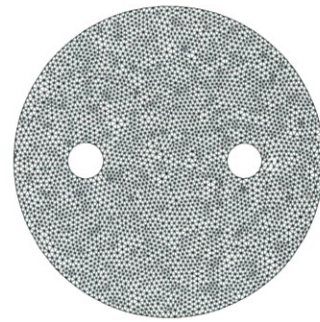


Rysunek 9. Izolinie rozwiązania.

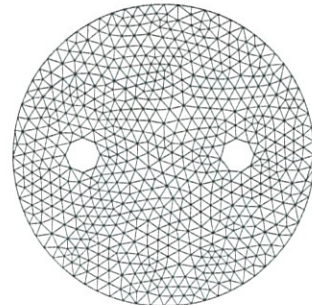
ra wyliczona na siatce zgrubnej miejscami odbiega od pozostałych o kilkanaście stopni. Nieco mniejsze różnice występują wzdłuż linii  $L_2$  (rys. 11b) oraz  $L_3$ . Dla obszaru, gdzie rozwiązanie jest prawie liniowe (tj. wzdłuż linii  $L_4$ ), rozwiązania pokrywają się.

Rozwiązanie uzyskane na siatce zaadaptowanej jest zatem bardziej zbliżone do rozwiązania na siatce gęstej i to pomimo liczby elementów tego samego rzędu, co w siatce zgrubnej.

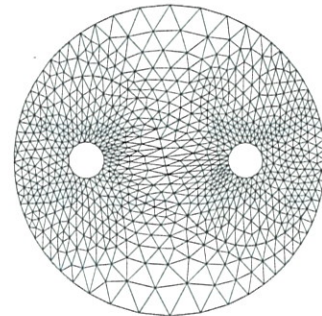
Obszar obliczeń dla drugiego przykładu pokazano na rysunku 12. Zadano następujące warunki brzegowe: na odcinkach AB oraz AJ warunek (13) z  $\alpha = 100$  [W/m<sup>2</sup>K],  $T_0 = 1300^\circ\text{C}$ , na odcinkach GF i FE również warunek (13) z  $\alpha = 6000$  [W/m<sup>2</sup>K],  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , na pozostałych odcinkach brzegowych warunek (13) z  $q = 0$  [W/m<sup>2</sup>] (izolacja). W obszarze ABCJ oraz DEFG wartość współczynnika  $k$  przyjęto 10, a w obszarze CDHI - 60.



(a) siatka gęsta 1

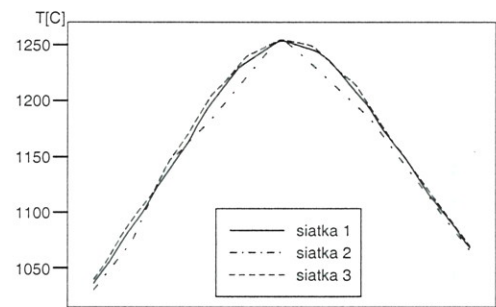


(b) siatka zgrubna 2

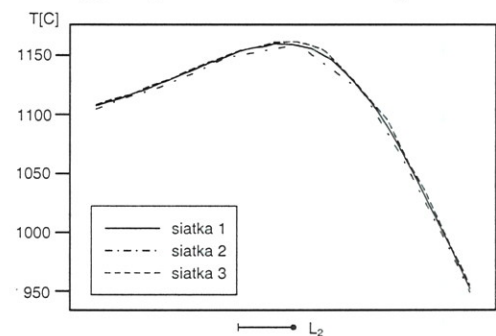


(c) siatka zaadaptowana 3

Rysunek 10. Siatki dla pierwszego przykładu obliczeniowego.



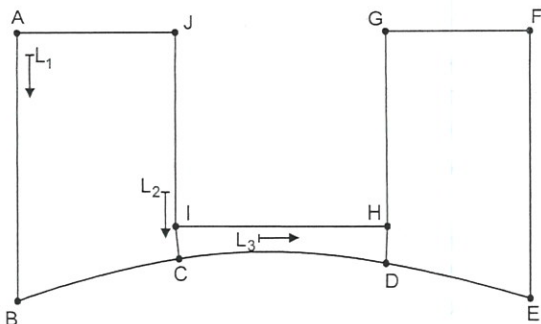
(a) temperatura wzdłuż linii  $L_1$



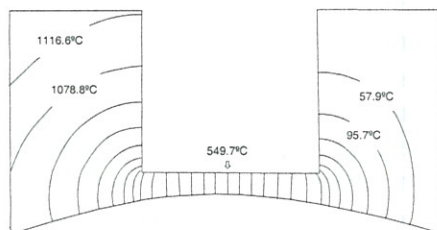
(b) temperatura wzdłuż linii  $L_2$

Rysunek 11. Porównanie temperatury obliczonej na różnych siatkach.





Rysunek 12. Obszar dla przykładu drugiego.



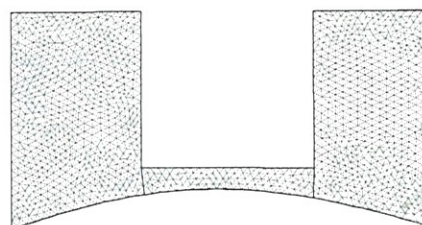
Rysunek 13. Izolinie rozwiązania.

Rysunek 13 przedstawia rozkład izolinii temperatury uzyskany dla symulacji na siatce gęstej.

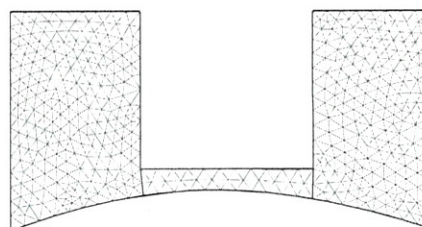
Rezultaty otrzymane dla tego przypadku obliczeniowego dla metryki wprowadzonej w dziewięciu izolowanych punktach podane są w pracy Głut i in. (2001). Wyniki przedstawione poniżej uzyskano stosując procedurę adaptacyjną opartą na hesjanie rozwiązania. Symulacje porównawcze przeprowadzono na siatce trójkątnej gęstej oraz rzadkiej (rys. 14a i b). Procedura adaptacyjna startowała z rozwiązania z siatki rzadkiej i doprowadziła do wygenerowania siatki adaptacyjnej trójkątnej (rys. 14c). Dodatkowo wygenerowano siatkę czworokątną na podstawie siatki zaadaptowanej trójkątnej (rys. 14d).

Podobnie jak poprzednio wybrano linie, wzdłuż których porównywano rozwiązania uzyskane na różnych siatkach (na rysunku 12 - linie  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ). Rysunek 15 przedstawia wykresy temperatury wzdłuż linii  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  dla obliczeń na wszystkich czterech siatkach. Linia  $L_1$  wybrana została w obszarze, w którym rozwiązanie zachowuje się w sposób nieliniowy. Na rysunku 15a widać, że rozwiązanie uzyskane na siatce zgrubnej różni się od pozostałych prawie o 20°C. Natomiast rozwiązanie na siatkach zaadaptowanych nie odbiega tak dalece od tego na siatce gęstej. Co więcej, przebieg temperatury w przypadku siatek 3 i 4 wydaje się być tu najlepszy. Podkreślić należy, że liczba elementów w siatce trójkątnej zaadaptowanej jest tego samego rzędu, co w siatce zgrubnej, a liczba elementów siatki 4 jest prawie czterokrotnie niższa.

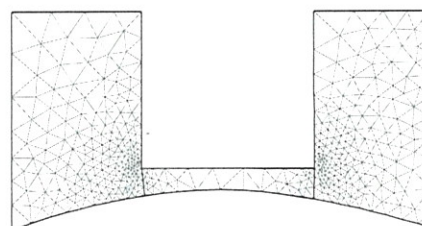
Rysunek 15b pokazuje przebieg temperatury wzdłuż linii  $L_2$ . Tu także widać, że symulacja na siatce zgrubnej daje temperaturę o kilka stopni niższą niż



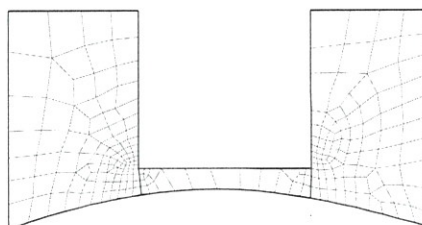
(a) gęsta 1 - 2587 elementów



(b) zgrubna 2 - 812 elementów



(c) zaadaptowana 3 - 820 elementów



(d) zaadaptowana 4 - 216 elementów

Rysunek 14. Siatki dla przykładu drugiego.

w pozostałych przypadkach. Tymczasem elementy w siatkach anizotropowych są w tym obszarze dużo większe niż w siatce 2. Różnica temperatury wynika tutaj z faktu, że na siatkach 1, 3 i 4 rozwiązanie w obszarze nieliniowych zmian temperatury tj. w okolicy węzłów I oraz H, zostało wyliczone dokładniej.

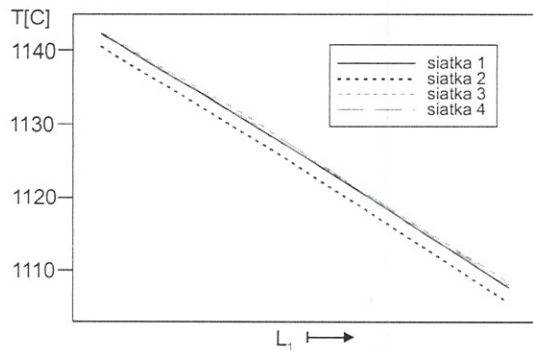
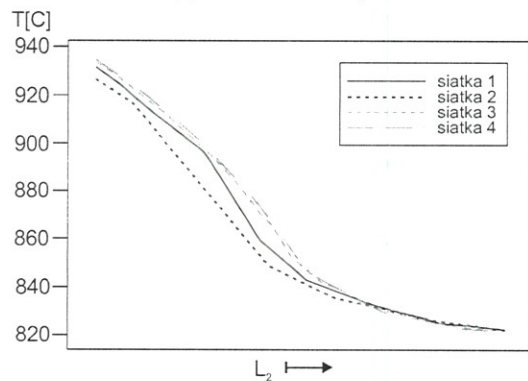
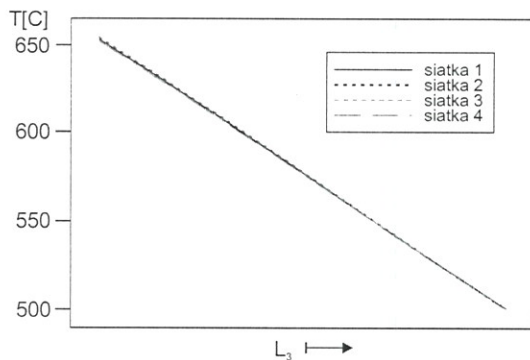
Wzdłuż linii  $L_3$  (rys. 15c) wyniki obliczeń na wszystkich siatkach prawie się pokrywają. Tu spadek temperatury jest stosunkowo duży, ale liniowy, więc elementy mogą być w tym obszarze większe nie powodując przy tym utraty precyzji rozwiązania.

### 5.3. Niestacjonarny przepływ ciepła

Dokładność przewidywania pól temperatury w różnych procesach w inżynierii materiałowej ma bardzo duże znaczenie. Dlatego za przykład dla zastosowa-





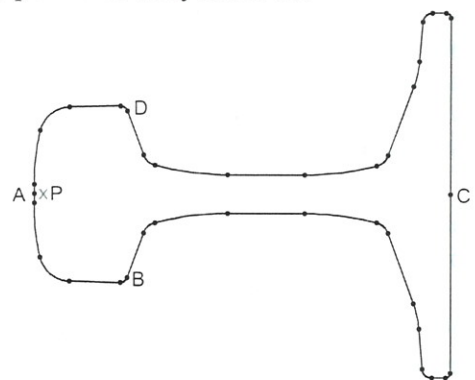
(a) wzdłuż linii  $L_1$ (b) wzdłuż linii  $L_2$ (c) wzdłuż linii  $L_3$ 

Rysunek 15. Porównanie temperatury obliczonej na różnych siatkach.

nia adaptacji siatki wybrano proces obróbki cieplnej wyrobów ze stali eutektoidalnych z wykorzystaniem ciepła plastycznej przeróbki na gorąco, głównie walcowania. Zabiegi przyspieszonego chłodzenia wyrobów po walcowaniu, stosowane głównie dla profili kształtowych takich jak szyny oraz dla walcówki i prętów zbrojeniowych, podwyższają ich własności wytrzymałościowe zwiększając równocześnie walory użytkowe. Minimalne wartości własności mechanicznych dla tych wyrobów to granica plastyczności  $Re = 800$  MPa, wytrzymałość na rozciąganie  $Rm = 1100$  MPa i wydłużenie całkowite  $A10 = 8\%$ . Połączenie wysokiej wytrzymałości z dobrą plastycznością wyrobów związane jest z mikrostrukturą drobne-

go perlitu o odległości między płytkami cementytu około  $0,1 \mu\text{m}$  oraz wielkości kolonii w przedziale  $5\text{--}10 \mu\text{m}$ . Aby uzyskać mikrostrukturę perlitu drobnego, konieczne jest sterowanie przebiegiem przemiany austenitu w perlit w ten sposób, aby przemiana ta zachodziła w wąskim przedziale temperatur  $550\text{--}500^\circ\text{C}$ . Pożądane jest uzyskanie w pełni perlitycznej mikrostruktury wyrobu bez wysp bainitu lub martenzytu, obniżających silnie plastyczność stali. Osiągnięcie tych celów wymaga wspomaganie projektowania technologii chłodzenia przez programy symulujące przebieg przemian fazowych w różnych warunkach, co obniża koszty związane z próbami przemysłowymi. W Akademii Górniczo-Hutniczej i w Instytucie Metalurgii Żelaza od szeregu lat prowadzone są badania mające na celu opracowanie modeli matematycznych opisujących kinetykę przemian fazowych i połączenie tych modeli z programami na bazie metody elementów skończonych, symulującymi procesy chłodzenia po plastycznej przeróbce na gorąco. Efektem tych prac są rozwiązania przewidujące zastosowanie chłodzenia od temperatury końca walcowania dla procesu umacniania szyn (Pietrzyk i Kuziak 2000) oraz prętów (Kuziak i Pietrzyk 1999). Wszystkie przeprowadzone badania w tym zakresie wykazały, że skuteczność symulacji procesów kontrolowanego chłodzenia zależy w dużej mierze od dokładności modelu temperaturowego.

Poniżej przedstawione są wyniki symulacji, z zastosowaniem różnych siatek, kontrolowanego chłodzenia szyny po walcowaniu na gorąco. Obszar obliczeniowy pokazano na rysunku 16.



Rysunek 16. Obszar obliczeniowy dla szyny.

Aby uzyskać przebieg zmian temperatury w szynie gwarantujący uzyskanie wymaganych własności wytrzymałościowych, szczególnie w główce szyny, jest ona poddawana specyficznej obróbce cieplnej składającej się na przemian ze swobodnego chłodzenia w powietrzu oraz przyspieszonego chłodzenia główki przez jej zanurzenie w wodnym roztworze polimerowym. W tym drugim sposobie chłodzenia część obwodu szyny BAD (rysunek 16) jest zanurzona w roz-



tworze, natomiast część obwodu BCD jest chłodzona swobodnie w powietrzu. Jako przykład dla zastosowania adaptacyjnego generatora siatki wybrano proces kontrolowanego chłodzenia składający się z 120 sekund swobodnego chłodzenia w powietrzu, 30 sekund zanurzenia główki szyny w roztworze i dalszego chłodzenia całej szyny w powietrzu (40 sekund).

Symulację procesu chłodzenia przeprowadzono wykorzystując rozwiązanie metodą elementów skończonych niestacjonarnego równania przewodzenia ciepła (11), dla którego współczynnik przewodności cieplnej oraz współczynnik wymiany ciepła są funkcjami temperatury. Warunki brzegowe dla tego rozwiązania obejmowały wymianę ciepła z otoczeniem (równanie 13). Współczynnik wymiany ciepła  $\alpha$  przyjmowano w zależności od warunków chłodzenia. Dla swobodnego chłodzenia w powietrzu uwzględniono zjawiska promieniowania i unoszenia ciepła, przyjmując:

$$\alpha(T) = \sigma \varepsilon (T_0 + T)(T_0^2 + T^2) \quad (14)$$

gdzie:  $\sigma$  – stała Boltzmana,  $\varepsilon$  – współczynnik emisyjności powierzchni.

W równaniu (14) temperatury przyjmowane są w skali bezwzględnej. Do wyznaczenia współczynnika wymiany ciepła dla chłodzenia w wodnym roztworze polimerowym wykorzystano wyniki badań Hodgsona i in., 1991. Dla temperatury powyżej 700°C współczynnik wymiany ciepła jest stały na poziomie 1700 W/m<sup>2</sup>K. Dla temperatury poniżej 700°C współczynnik ten rośnie liniowo ze spadkiem temperatury i osiąga wartość 6000 W/m<sup>2</sup>K w temperaturze 300°C, a następnie maleje do wartości przyjmowanej w temperaturze otoczenia.

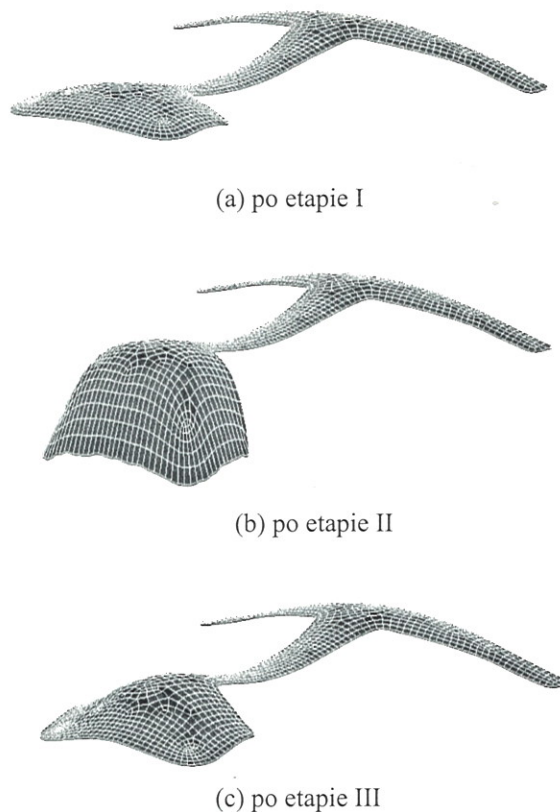
Symulacje przeprowadzono wykorzystując elementy czworokątne dwunastowęzłowe. Ten typ elementów nawet przy stosunkowo małej liczbie czworokątów zapewnia już dużą precyzję rozwiązania (ze względu na stopień funkcji kształtu). Szczegóły dotyczące zastosowanego w niniejszej pracy rozwiązania metodą elementów skończonych i całkowania po czasie podane są przez Lenarda i in., 1999.

Obliczenia w celu porównań wykonano najpierw na siatce gęstej o 1481 elementach (rys. 18a). Pierwszy etap procesu symulowany był w 60 iteracjach czasowych (precyzyjniej w 64 – pierwszy krok czasowy każdego etapu dzielony jest dodatkowo na pięć kroków), drugi etap – 75 iteracji (79), trzeci – 20 (24).

Powierzchnie rozkładu temperatury po kolejnych etapach procesu wyliczone na siatce gęstej zilustrowano na rysunku 17.

Porównawczo przeprowadzono również obliczenia na siatce rzadkiej o 151 elementach (rysunek 18b).

Procedura adaptacyjna wymagała najpierw wybo-



Rysunek 17. Powierzchnia rozkładu temperatury po kolejnych etapach procesu.

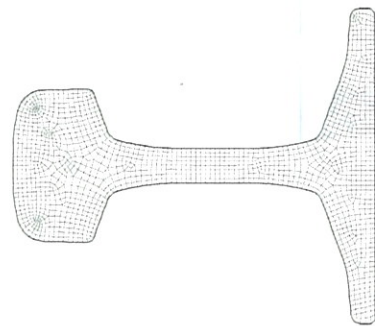
ru kroku czasu, dla którego będzie ona wykonana. Zdecydowano, że najlepiej zrobić to na początku etapu II po około 5 sekundach. Ze względu na fakt, że proces jest niestacjonarny wykorzystać należało dwa kroki czasowe. Były to kroki  $k_1 = 80$  ( $t = 124,8$  s) oraz  $k_2 = 81$  ( $t = 125,2$  s).

Adaptację przeprowadzono w sposób iteracyjny. Dla kroku  $k_2$  wyliczono hesjan w węzłach siatki. Na jego podstawie aproksymowano metrykę w całym obszarze oraz generowano nową siatkę trójkątną. Siatka ta była potem konwertowana na siatkę czworokątną dwunastowęzłową. Do siatki tej przenoszone były wartości temperatury z poprzedniej siatki z kroku  $k_1$  (interpolacje wartości wykonywano wykorzystując funkcje kształtu). Następnie przeprowadzono ponownie symulację od kroku  $k_1$ , w którym przeniesione wartości temperatury traktowane były jako początkowe. Procedurę powtarzano dopóki liczba elementów w siatce nie ustabilizowała się (około 210 elementów).

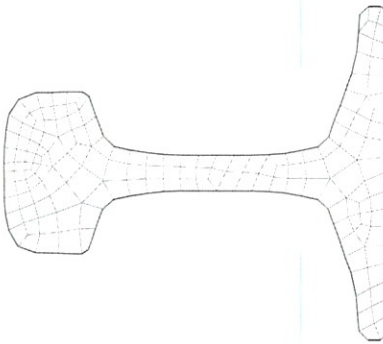
Adaptację wykonano zaczynając od siatki gęstej, więc do stabilizacji liczby elementów wystarczyły zaledwie dwie iteracje. Siatka zaadaptowana przedstawiona jest na rysunku 18c.

Dla wybranego punktu  $P$ , znajdującego się w odległości ok. 3mm od brzegu szyny (rys. 16), porównano wyniki obliczeń wykonanych na siatce gęstej, rzadkiej i zaadaptowanej. Na rysunku 19 przedstawiono wykresy różnicy temperatur w czasie w punkcie  $P$ .

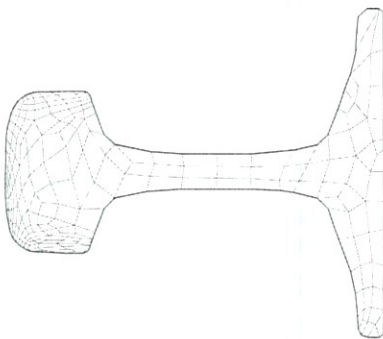




(a) 1481 elementów



(b) 151 elementów



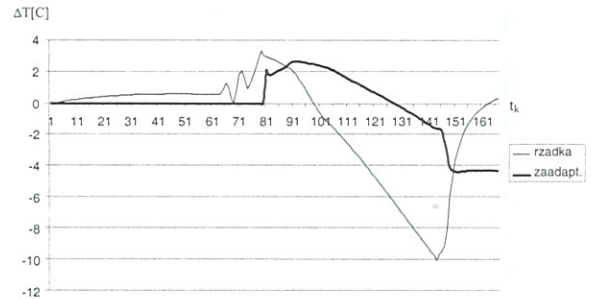
(c) 210 elementów

Rysunek 18. Siatki wygenerowane dla symulacji procesu chłodzenia szyny.

Linia cienka reprezentuje różnicę wyników symulacji wykonanych na siatce rzadkiej i gęstej natomiast linia pogrubiona różnicę wyników symulacji na siatce zaadaptowanej i gęstej. W kroku 81 widoczny jest efekt adaptacji i przeniesienia wartości do nowej siatki. Tym niemniej spowodowało to różnicę jedynie 2 stopni i w dalszym czasie symulacji różnica temperatur nie przekroczyła 5 stopni. Natomiast dla siatki rzadkiej pod koniec fazy chłodzenia roztworem różnica temperatury w stosunku do wyliczonej na siatce gęstej wynosi już 10 stopni.

## 6. WNIOSKI

- Zaproponowana technika adaptacji siatek pozwala zagęszczać i rozgęszczać siatki w wybranych



Rysunek 19. Różnica temperatury dla punktu P w kolejnych iteracjach czasowych.

podobszarach, jak również generować siatki wydłużone w zadanym kierunku.

- Procedura spełnia wymagania stawiane adaptacji. Właściwie przybliża powierzchnie rozwiązania minimalizując jednocześnie liczbę elementów niezbędnych do obliczeń z zadaną precyzją.
- Liczba elementów w trakcie adaptacji oscyluje w kolejnych krokach procedury i ostatecznie stabilizuje się na poziomie gwarantującym odpowiednią dokładność obliczeń.
- Metoda może być wykorzystana zarówno do adaptacji dla problemów dwuwymiarowych, jak i do konstrukcji siatek dla trójwymiarowych powierzchni.

Praca została wykonana w ramach grantu KBN nr 8T11F 012 16.

## LITERATURA

- Ainsworth, M., Oden, J.T., 1997, A posteriori error estimation in finite element analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 142, 1-88.
- Almeida, R.C., Feijoo, R.A., Galeao, A.C., Padra, C., Silva, R.S., 2000, Adaptive finite element computational fluid dynamics using an anisotropic error estimator, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 182, 379-400.
- Buscaglia, G.C., Dari, E.A., 1997, Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 40, 4119-4136.
- Dolejsi, V., 1998, Anisotropic mesh adaptation for finite volume and element methods on triangular meshes, *Comput. Visual Sci.*, 1, 165-178.
- George, P.L., Borouchaki H., 1997, *Triangulation de Delaunay et maillage - application aux éléments finis*, Hermes, Paris.
- Głut, B., 1983, Zbieżność schematów różnicowych na siatkach o dowolnej konfiguracji węzłów, *Praca magisterska*, WE-AiE, AGH, Kraków.
- Głut, B., Boryczko, K., Jurczyk, T., Alda, W., 2000 (a), Comparison of algorithm efficiency and mesh quality in Delaunay triangulation for complex 2D domains, *Mat. 7. Konf. Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, Whistler, 789-798.
- Głut, B., Boryczko, K., Jurczyk, T., Alda, W., Kitowski, J., 2000 (b), High quality 2D mesh generation based on Delaunay triangulation, *Mat. SGI Users Conference*, Kraków, 334-343.



- Głut, B., Jurczyk, T., Pietrzyk, M., 2001, Zastosowanie siatek anizotropowych w modelowaniu procesów metodą elementów skończonych, *Mat. Konf. Informatyka w Technologii Metali KomPlasTech2001*, ed.: Grosman, F., Piela, A., Kuziak, J., Pietrzyk, M., Korbilów, 35-42.
- Hodgson, P.D., Browne, K.M., Collinson, D.C., Pham, T.T., Gibbs, R.K., 1991, A Mathematical Model to Simulate the Thermomechanical Processing of Steel, *Mat. 3. Konf. Quenching and Carburising*, Melbourne, 139-159.
- Jurczyk, T., Głut, B., 2001, Generation of triangular meshes for complex domains. *Computer Science, Annual of University of Mining and Metallurgy*, 3, Kraków, w druku.
- Kuziak, R., Pietrzyk, M., 1999, Finite Element Modelling of Accelerated Cooling of Rods after Rolling, *Mat. 41 MWSP Konf.*, Baltimore, 405-414.
- Lenard, J.G., Pietrzyk, M., Cser, L., 1999, *Mathematical and Physical Simulation of the Properties of Hot Rolled Products*, Elsevier, Amsterdam.
- Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O.C., 2000, Adaptive mesh generation for fluid mechanics problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 47, 629-662.
- Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., Zienkiewicz, O. C., 1987, Adaptive remeshing for compressible flow computations, *J. Comput. Phys.*, 72, 449-466.
- Pietrzyk, M., Kuziak, R., 2000, Modeling of Controlled Cooling of Rails after Hot Rolling, *Mat. Konf. Rolling 2000*, Vasteros, CD ROM.
- Szabo, B., Babuška, I., 1991, *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc.
- Thomson, J.F., Soni, B.K., Weatherill, N.P., editors, 1999, *Handbook of Grid Generation*, CRC Press LLC.
- Vallet, M.G., 1992, *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*, Praca doktorska, l'Univerisité Paris 6.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.C., 1989, *The Finite Element Method*, McGraw Hill.

