

ELIMINACJA BLOKADY OBJĘTOŚCIOWEJ W LINIOWYCH ELEMENTACH TRÓJKĄTNYCH I CZWOROŚCIENNYCH. ZASTOSOWANIE DO SYMULACJI PROCESÓW PRZERÓBKII PLASTYCZNEJ NA ZIMNO

JERZY ROJEK, OLGIERD C. ZIENKIEWICZ

ELIMINATION OF VOLUMETRIC LOCKING IN TRIANGULAR AND TETRAHEDRAL LINEAR ELEMENTS. APPLICATION TO SIMULATION OF METAL FORMING PROCESSES

Abstract

The authors deal with the numerical problem of volumetric locking occurring in finite element simulation of metal forming processes and other problems characterized with incompressible deformation. Volumetric locking is present in all finite elements based on the standard displacement formulation as well as in mixed elements using equal order interpolation for displacements and pressure. Special stabilizing techniques are necessary in order to avoid volumetric locking in such useful elements as triangles and tetrahedra with linear interpolation of displacements and pressure. An original method to eliminate volumetric locking has been developed and applied to analysis of metal forming problems. The stabilization method, called CBS (Characteristics Based Split), is based on the splitting of the Stokes equations describing elasto-plastic deformation of the material. The split algorithm has been implemented within an explicit dynamic finite element code. Numerical examples of metal forming simulation demonstrate effectiveness and correctness of the theoretical formulation and numerical algorithm.

1. WSTĘP

Elementy skończone stosowane w symulacji procesów przeróbki plastycznej powinny dobrze modelować stany odkształcenia materiału charakteryzujące się nieściśliwością, co jest typowe dla metalu odkształcanego plastycznie. Elementy skończone oparte na standardowym sformułowaniu przemieszczeniowym MES ulegają tzw. blokadzie objętościowej, która przejawia

się nadmierną sztywnością elementów na odkształcenia. Blokada objętościowa elementów przemieszczeniowych wynika z niemożności ścisłego opisanie przez funkcję kształtu elementu pola przemieszczeń charakteryzującego się odkształceniem o niezmienniej objętości (izochorycznego) w całym elemencie (Zienkiewicz i Taylor 2000, Hughes 1987), Belytschko i in. 2000). Defekt blokady objętościowej dyskwalifikuje elementy w przypadku analizy przeróbki plastycznej.

Zastosowanie sformułowania mieszanego, w którym wprowadza się niezależną interpolację dla pola przemieszczeń (prędkości) i ciśnienia, pozwala uniknąć blokady objętościowej w przypadku wielu elementów (zobacz Hughes 1987), np. w przypadku ośmiowzłowych elementów sześciściennych $Q1/P0$ (z trójliniową interpolacją przemieszczeń i stałym ciśnieniem w elemencie) i czterowzłowych czworokątów $Q1/P0$ (z biliniową interpolacją przemieszczeń i stałym ciśnieniem). Niestety w przypadku elementów z równym stopniem interpolacji przemieszczeń i ciśnienia $Q1/P1$, w tym najprostszych elementów trójwzłowych trójkątnych i czterowzłowych czworokątnych z liniową interpolacją przemieszczeń i ciśnienia, zastosowanie sformułowania mieszanego nie usuwa blokady objętościowej. Konieczne jest zastosowanie specjalnych metod stabilizacji. W artykule przedstawia się jedną z możliwych metod zwaną metodą CBS (ang. *characteristics based split*) lub metodą prędkości cząstkowej (ang. *fractional velocity, fractional step*), która jest oparta na specjalnym algorytmie całkowania równań ruchu połączonym z ich dekompozycją. Metoda ta rozwinięta w mechanice płynów (Zienkiewicz i Codina 1995, Zienkiewicz i in. 1995), została następnie rozszerzona na zagadnienia mechaniki ciała stałego (Zienkiewicz i in. 1998).

W rozdziale 1 przedstawione jest sformułowanie zagadnienia przeróbki plastycznej jako zagadnienia mechaniki płynów opisanego równaniami Stokesa, przy czym przerabiany metal jest traktowany jako płyn lepki. W rozdziale 2 omówiona została dyskretyzacja czasowa, a w rozdziale 3 przedstawiona jest dyskretyzacja przestrzenna równań ruchu przy zastosowaniu metody Galerkin. Następnie przedstawiono możliwe schematy całkowania równań względem czasu, przy czym uwaga została zwrócona na zalety związane z zastosowaniem jawnego algorytmu całkowania. Efekt blokady objętościowej i stosowane metody stabilizacji są omówione nieco szerzej w rozdziale 4. Rozdział 5 przedstawia zasadniczą część niniejszego artykułu – sformułowanie specjalnego algorytmu całkowania równań ruchu eliminującego blokadę objętościową. W rozdziale 6 przedstawione jest rozszerzenie algorytmu na zagadnienie mechaniki ciała stałego wraz z modelem materiału sprężysto-plastycznego przeznaczonego do modelowania dużych odkształceń metali. W rozdziale 7 zostały zamieszczone wyniki obliczeń numerycznych pokazujące możliwość stosowa-

nia rozwiniętych modeli do zagadnień przeróbki plastycznej na zimno. Sformułowanie modelu sprężysto-plastycznego przedstawione jest nieco szerzej w Dodatku.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU MECHANICZNEGO

1.1. Równania ruchu

Proces kształtowania metali rozpatruje się jako nieliniowe zagadnienie mechaniki stosując alternatywnie jeden z dwóch następujących opisów (np. Oñate i Agelet de Saracibar 1992a; 1992b, Oñate i in. 1995):

- równania mechaniki płynów,
- równania mechaniki ciała stałego.

W sformułowaniu “zapożyczonym” z mechaniki płynów przerabiany materiał traktuje się jako lepki płyn nieściśliwy lub posiadający niewielką ściśliwość. Zagadnienie traktuje się jako proces quasi-statyczny (pomijając efekty inercyjne w równaniach ruchu), albo jako proces dynamiczny (uwzględniając efekty inercyjne w równaniach ruchu).

Uwzględniając efekty inercyjne, założymy obecnie, że rozpatrywany proces odkształcania ciała o objętości Ω i brzegu Γ można opisać znanymi z mechaniki płynów równaniami Stokesa, por. (Zienkiewicz i Taylor 2000):

- zasada zachowania pędu

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (1)$$

- zasada zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \quad (2)$$

W powyższych równaniach ρ jest gęstością, v_i – składową prędkości w kierunku osi x_i ($i = 1, 2, 3$), g_i – składową siłą obciążenia masowego s_{ij} – składową dewiatora naprężeń Cauchy’ego, p – ciśnieniem hydrostatycznym (dodatnim dla ściskania)

$$p = - \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (3)$$

gdzie σ_{ij} jest tensorem naprężenia Cauchy’ego

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p\delta_{ij} \quad (4)$$

W zapisie równań (1)–(3) i innych równaniach w dalszej części niniejszego artykułu stosuje się konwencję sumacyjną Einsteina. Równania (1) i (2) muszą być uzupełnione odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi. W chwili $t = 0$ konieczne jest określenie pola prędkości w całym ciele Ω

$$v_i = v_i^0 \quad (5)$$

Na brzegu możemy mieć określone dwa rodzaje warunków:

- (i) warunki kinematyczne określające prędkości \hat{v}_i (lub przemieszczenia) w chwili t na części brzegu Γ_v

$$v_i = \hat{v}_i \quad (6)$$

- (ii) warunki naprężeniowe zadające wielkość obciążenia w chwili t na części brzegu Γ_t

$$t_i = \hat{t}_i \quad (7)$$

przy czym należy pamiętać, że na brzegu obowiązuje zależność

$$t_i = n_j(\tau_{ij} - \delta_{ij} p) \quad (8)$$

gdzie n_j jest składową wektora normalnego do brzegu.

W porównaniu do pełnych równań Naviera–Stokesa w równaniu (1) pominięto konwekcyjne składowe pochodnych prędkości, gdyż do opisu odkształcenia zostaną zastosowane współrzędne konwekcyjne.

Dla płynu z niewielką ściśliwością równania Stokesa można uprościć do następującej postaci:

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (9)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (10)$$

gdzie c jest prędkością dźwięku w materiale, wyrażającą się następującą zależnością:

$$c^2 = \frac{K}{\rho_0} \quad (11)$$

przy czym K jest modułem sztywności objętościowej. W równaniach (9)–(11) założono stałe wartości modułu K oraz gęstości ρ (równej gęstości początkowej ρ_0).

Dla płynu nieściśliwego ($K \rightarrow \infty$) równanie zachowania masy (10) można zapisać jako

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

co wyraża warunek nieściśliwości.

Równania (9)–(10) będą podstawą procedury dyskretyzacyjnej prowadzącej do sformułowania mieszanego elementów skończonych.

1.2. Równania konstytutywne materiału sztywno-lepko-plastycznego

Materiał poddany przeróbce plastycznej może być traktowany jest jako materiał sztywno-plastyczny lub sztywno-lepkoplastyczny. Dewiator naprężenia może być wyrażony poprzez współczynnik lepkości μ i dewiator prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$

$$s_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad (13)$$

gdzie dewiator prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$ jest zdefiniowany w następujący sposób

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (14)$$

Współczynnik lepkości μ można określić za pomocą naprężenia płynięcia σ_{pl} i parametrów określających lepkie własności materiału γ i n

$$\mu = \frac{\sigma_{pl} + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\gamma} \right)^{1/n}}{3\dot{\epsilon}} \quad (15)$$

gdzie $\dot{\epsilon}$ intensywność prędkości odkształcenia postaciowego

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (16)$$

Dla materiału sztywno-plastycznego $\gamma \rightarrow \infty$ i równanie (15) upraszcza się do

$$\mu = \frac{\sigma_{pl}}{3\dot{\epsilon}} \quad (17)$$

2. DYSKRETYZACJA CZASOWA I CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU WZGLĘDEM CZASU

Rozwiązanie równań (9)–(10) wymaga zastosowania wybranej procedury całkowania względem czasu. Zakładając, że znane jest rozwiązanie tego układu równań w pewnej chwili $t_n \in [0, T]$ określone poprzez v_i^n i p^n , poszukiwać będziemy rozwiązania v_i^{n+1} i p^{n+1} w chwili $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

W tym celu zastąpimy pochodne względem czasu wyrażeniami różnicowymi

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad (19)$$

gdzie

$$\Delta v_i = v_i^{n+1} - v_i^n \quad (20)$$

$$\Delta p = p^{n+1} - p^n \quad (21)$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (22)$$

i założymy, że równania różnicowe otrzymane po wstawieniu (18) i (19) do (9)–(10) są spełnione dokładnie w pewnej chwili $t_{n+\theta} = t_n + \theta \Delta t$, gdzie $\theta \in [0, 1]$

$$\rho_0 \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{\partial s_{ij}^{n+\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+\theta}}{\partial x_i} + g_i^{n+\theta} \quad (23)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\rho_0 \frac{\partial v_i^{n+\theta}}{\partial x_i} \quad (24)$$

Wskaźnik $n + \theta$ określa wartość zmiennej w chwili $t_n + \theta \Delta t$. Przy założeniu, że rozwiązanie v_i i p zmienia się liniowo w przedziale Δt można napisać

$$v_i^{n+\theta} = (1 - \theta)v_i^n + \theta v_i^{n+1} = v_i^n + \theta \Delta v_i \quad (25)$$

$$p^{n+\theta} = (1 - \theta)p^n + \theta p^{n+1} = p^n + \theta \Delta p \quad (26)$$

Współczynnik θ zwany jest parametrem niejawności schematu całkowania. Przyjmując $\theta = 0$ otrzymuje się jawną metodę całkowania Eulera, $\theta = 0.5$ daje metodę trapezów, a przy $\theta = 1$ mamy niejawną wsteczną metodę Eulera, por. (Krupowicz 1986).

3. DYSKRETYZACJA PRZESTRZENNA RÓWNAŃ RUCHU

Do równań (23) i (24) wprowadzamy dyskretyzację przestrzenną typową dla elementów skończonych, aproksymując wektorowe pole prędkości \mathbf{v} i pole ciśnienia p za pomocą zależności

$$\mathbf{v} \approx \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{N}_v \tilde{\mathbf{v}} \quad (27)$$

$$p \approx \tilde{p} = \mathbf{N}_p \tilde{\mathbf{p}} \quad (28)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{v}}$ i $\tilde{\mathbf{p}}$ oznaczają wektory nieznanych parametrów węzłowych, a \mathbf{N}_v i \mathbf{N}_p — macierze

funkcji interpolacyjnych spełniających kinematyczne warunki brzegowe. Stosując metodę Galerkiną do równania (23) z wykorzystaniem całkowania przez części otrzymuje się w zapisie macierzowym następujące równanie, por. (Zienkiewicz i Taylor 2000)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \rho_0 \mathbf{N}_v d\Omega \right)^{n+\theta} \Delta \tilde{\mathbf{v}} = \\ & = - \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T s d\Omega \right)^{n+\theta} + \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \right)^{n+\theta} \tilde{\mathbf{p}}^{n+\theta} \\ & + \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \mathbf{g} d\Omega \right)^{n+\theta} + \left(\int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_v^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \right)^{n+\theta} \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie $\hat{\mathbf{t}}$ jest zadaniem obciążeniem na części brzegu Γ_t , \mathbf{g} — obciążeniem masowym, a \mathbf{B} — macierzą wiążącą prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$ z prędkościami węzłowymi $\tilde{\mathbf{v}}$, por. (Zienkiewicz i Taylor 2000):

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} \quad (30)$$

Przedstawiając prawo konstytutywne (13) jako

$$\mathbf{s} = \mathbf{D} \dot{\epsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} \quad (31)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = 2\mu \mathbf{I} \quad (32)$$

można zapisać drugą całkę równania (29) w następującej postaci:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T s d\Omega = \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \tilde{\mathbf{v}} \quad (33)$$

Zastosowanie metody Galerkiną do równania (24) daje, por. (Zienkiewicz i Taylor 2000)

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_0 c^2} \mathbf{N}_p d\Omega \right)^{n+\theta} \Delta \tilde{\mathbf{p}} = \\ & - \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega \right)^{n+\theta} \tilde{\mathbf{v}}^{n+\theta} \end{aligned} \quad (34)$$

Wykorzystując zależność (33), równania (29) i (34) można zapisać łącznie w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix}^{n+\theta} \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{v}} \\ \Delta \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{n+\theta} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix}^{n+\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix}^{n+\theta} \end{aligned} \quad (35)$$

W równaniu (35) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \rho_0 \mathbf{N}_v d\Omega \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_0 c^2} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (37)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (38)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad (39)$$

$$\mathbf{f}_v = \int_{\Omega} \mathbf{N}_v^T \bar{\mathbf{t}} d\gamma + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_v^T \mathbf{g} d\Omega \quad (40)$$

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{0} \quad (41)$$

Po uwzględnieniu zależności (25) i (26) w równaniu (35) otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \theta \mathbf{K} & -\theta \mathbf{Q} \\ -\theta \mathbf{Q}^T & -\tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix}^{n+\theta} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{v}} \\ \Delta \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = -\Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{n+\theta} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix}^n + \Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix}^{n+\theta}$$

Układ równań (42) jest nieliniowy, gdyż występujące w nim macierze zależą od wartości niewiadomych w chwili $t_{n+\theta}$. Dokładne rozwiązanie wymaga zastosowania procedury iteracyjnej. Nieiteracyjne rozwiązanie jest możliwe tylko w przypadku zastosowania jawnego schematu rozwiązania ($\theta = 0$). Rozwiązanie przyrostowe otrzymuje się wtedy z rozwiązania układu liniowego

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{v}} \\ \Delta \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = -\Delta t \begin{bmatrix} \mathbf{K} \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{Q} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_v \\ -\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{f}_p \end{bmatrix}^n \quad (43)$$

Rozwiązanie jawne jest szczególnie łatwe jeśli zastosuje się jednocześnie diagonalizację macierzy \mathbf{M} i $\tilde{\mathbf{M}}$. Układ równań (43) rozpręga się wtedy i nie ma potrzeby kosztownego numerycznie odwracania macierzy dla wyznaczenia rozwiązania układu równań algebraicznych. Rozwiązanie dla pojedynczego kroku jest bardzo efektywne numerycznie. Inną zaletą tego podejścia są małe wymagania pamięci, gdyż nie ma potrzeby budowania i przechowywania macierzy współczynników układu równań. Z powodu tych zalet jawny schemat całkowania jest bardzo atrakcyjny. Programy MES oparte na jawnym całkowaniu względem czasu znalazły wiele zastosowań, w tym również do symulacji procesów przeróbki plastycznej (Oñate i in. 1995, Rojek i in. 1998). Wadą schematu jawnego jest jego warunkowa stabilność numeryczna. Dla

stabilności rozwiązania konieczne jest stosowanie małego kroku całkowania Δt ograniczonego przez pewną wartość krytyczną (Zienkiewicz i Taylor 2000, Hughes 1987). Rozwiązanie całkowite wymaga stosowania bardzo dużej liczby kroków. Niedogodność tę można w niektórych przypadkach zmniejszyć poprzez algorytmiczne zwiększenie efektów inercyjnych skalując masę lub zwiększając prędkość kształtowania. Doświadczenie pokazuje, że stosując te zmiany wprowadzamy w pewnym zakresie prędkości kształtowania stosunkowo niewielki błąd (rzędu kilku procent), który jest zazwyczaj do przyjęcia w praktycznych zastosowaniach.

Mimo wymienionych ograniczeń sformułowanie wykorzystujące jawne całkowanie względem czasu przy analizie dużych zagadnień jest zwykle znacznie efektywniejsze niż niejawne schematy rozwiązania. Dlatego też jawne schematy rozwiązania są powszechnie wykorzystane w wielu komercyjnych programach do symulacji przeróbki plastycznej, np. LS-DYNA (Hallquist 1998), PAM-STAMP (PAM-STAMP. User's Manual, 1998).

4. EFEKTY BLOKADY OBJĘTOŚCIOWEJ

Nieściśliwość materiału sprawia spore kłopoty w analizie numerycznej. Należy zwrócić uwagę, że dla idealnej nieściśliwości mamy $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$, co uniemożliwia zastosowanie jawnego schematu rozwiązania opisanego wzorem (43). Nieściśliwość powoduje inny, jeszcze poważniejszy problem numeryczny, wynikający z istnienia zerowej podmacierzy na przekątnej w pierwszym członie po prawej stronie równań (35) i (42). Jest to przyczyną tak zwanej blokady objętościowej (ang. volumetric locking). Efekt ten objawia się nadmierną sztywnością elementów na odkształcenia, co prowadzi do zupełnie fałszywych wyników. Przykład błędnego rozwiązania spowodowanego blokadą objętościową zostanie przedstawiony w ostatnim rozdziale tego artykułu.

Blokada objętościowa występuje we wszystkich elementach opartych na standardowym sformułowaniu przemieszczeniowym, por. (Zienkiewicz i Taylor 2000, Hughes 1987). Blokada objętościowa elementów przemieszczeniowych jest spowodowana niemożnością przedstawienia za pomocą funkcji kształtu pola przemieszczeń charakteryzującego się zerowym odkształceniem objętościowym w

całym elemencie (Hughes 1987, Belytschko i in. 2000).

Aby uniknąć blokady objętościowej stosuje się elementy oparte o sformułowanie mieszane (stosowane w niniejszej pracy), w którym wprowadza się niezależną interpolację dla pola przemieszczeń (prędkości) i ciśnienia. Sformułowanie mieszane jest w zasadzie równoważne sformułowaniu przemieszczeniowemu z nałożonym ograniczeniem (więzem) na odkształcenie objętościowe — ciśnienie spełnia rolę mnożnika Lagrange'a (Belytschko i in. 2000).

Rozpatrzmy równania MES opartej na sformułowaniu mieszanym opisujące ustalony proces odkształcenia materiału nieściśliwego

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (44)$$

Równanie (44) otrzymano poprzez uproszczenie równania (35). Eliminując z powyższego układu równań prędkości węzłowe $\bar{\mathbf{v}}$ otrzymuje się następujące równanie z niewiadomym wektorem ciśnień węzłowych $\bar{\mathbf{p}}$:

$$(\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \bar{\mathbf{p}} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_v - \mathbf{f}_p \quad (45)$$

Aby równanie (45) miało rozwiązanie, musi być spełniony prosty warunek (Zienkiewicz i Taylor 2000, Belytschko i in. 2000):

$$n_{\text{dof}} \geq n_p \quad (46)$$

gdzie n_{dof} gdzie liczba niewiadomych w wektorze $\bar{\mathbf{v}}$, a n_p liczba niewiadomych w wektorze $\bar{\mathbf{p}}$. Liczby niewiadomych odnoszą się do całego układu dyskretnego, który tylko w szczególnym przypadku może być pojedynczym elementem. Nierówność (46) wyraża w prosty sposób warunki stabilności elementów opartych na sformułowaniu mieszanym zwane warunkami Babuški–Brezzi (Hughes 1987, Babuška 1973).

Do elementów spełniających warunek (46) należą m.in. element czterowęzłowy czworokątny Q1/P0 z biliniową interpolacją przemieszczeń i ciśnieniem stałym w elemencie (dla zagadnień dwuwymiarowych) oraz ośmiowęzłowy sześciścienny element Q1/P0 z trójliniową interpolacją przemieszczeń i ciśnieniem stałym w elemencie (dla zagadnień trójwymiarowych). Niestety warunki stabilności BB nie są spełnione dla elementów z równym stopniem interpolacji przemieszczeń i ciśnienia Q1/P1, w tym najprostszych elementów trójwęzłowych trójkątnych i czterowęzłowych czworokątnych z liniową inter-

polacją przemieszczeń i ciśnienia. W przypadku stosowania tych elementów mamy do czynienia z blokadą objętościową (Hughes 1987). Aby ją wyeliminować konieczne jest stosowanie specjalnych metod stabilizacji. Należy podkreślić, że wprowadzenie niewielkiej ściśliwości np. poprzez zastosowanie funkcji kary do warunku nieściśliwości, nie rozwiązuje problemu blokady objętościowej.

Specjalne metody zredukowanego lub selektywnego całkowania w obszarze elementu (Zienkiewicz i Taylor 2000, Hughes 1987) dające poprawnie działające elementy czterowęzłowe czworokątne (dla zagadnień dwuwymiarowych) i ośmiowęzłowe sześciścienne (dla zagadnień trójwymiarowych) są równoważne odpowiednim elementom uzyskanym w wyniku zastosowania sformułowania mieszanego (Hughes 1987), i zawodzą w przypadkach, w których zawodzi sformułowanie mieszane.

Metody stabilizacji często sprowadzają się do dodania stabilizujących członów do równania zasady zachowania masy, które po dyskretyzacji dają niezerową podmacierz na przekątnej w równaniu (44). Brezzi i Pitkäranta (Brezzi i Pitkäranta 1984) zaproponowali dodanie członu $h\mathbf{K}_p$, gdzie h jest wymiarem charakterystycznym elementu skończonego, a \mathbf{K}_p jest zdefiniowana wzorem

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{N}_p \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (47)$$

Hughes i in. (Hughes i in. 1986) uzyskał stabilizujący człon poprzez dodanie równania zasady zachowania pędu pomnożonego przez współczynnik zdefiniowany jako

$$\frac{\alpha h^2}{2\mu} \nabla \mathbf{N}_p \quad (48)$$

gdzie α jest pewnym parametrem, h — wymiarem charakterystycznym elementu skończonego, a μ — lepkością. Ta procedura stabilizacyjna jest nazywana metodą GLS (ang. Galerkin Least Squares). Otrzymany w wyniku jej zastosowania układ równań ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{L} - \mathbf{Q}^T & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (49)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_p = \frac{\alpha h^2}{2\mu} \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{N}_p \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (50)$$

$$\mathbf{L} = \alpha h^2 \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{N}_p \nabla \mathbf{s} d\Omega \quad (51)$$

W niniejszej pracy przedstawiona jest metoda eliminacji blokady objętościowej poprzez zastosowanie specjalnego schematu całkowania względem czasu równań metody elementów skończonych opartych na sformułowaniu mieszanym. Metoda ta jest nazywana metodą CBS (ang. *characteristics based split*) lub metodą prędkości cząstkowej (ang. *fractional velocity, fractional step*) (Zienkiewicz i Taylor 2000). Metoda ta została rozwinięta początkowo w mechanice płynów (Zienkiewicz i Codina 1995, Zienkiewicz i in. 1995). Autorzy z powodzeniem zastosowali ją do zagadnień mechaniki ciała stałego (Zienkiewicz i in. 1998).

5. ELIMINACJA BLOKADY OBJĘTOŚCIOWEJ – METODA CBS

Podobnie jak poprzednio rozpoczniemy od dyskretyzacji w czasie równań różniczkowych (9) i (10). Rozwiązanie przyrostowe na kroku $n+1$ (dla chwili t_{n+1}) będzie wyznaczone z następujących równań:

$$\rho_0 \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{\partial s_{ij}^{n+\theta_3}}{\partial x_j} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + g_i^{n+\theta_3} \quad (52)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\rho_0 \frac{\partial v_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} \quad (53)$$

W powyższych równaniach zostały wprowadzone trzy parametry niejawności, $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, 1]$. Wskaźniki $n+\theta_i$, $i = 1, 2, 3$ dla dowolnej zmiennej oznaczają kombinację liniową wartości tej zmiennej na początku i na końcu kroku analogiczną do określonej równaniami (25) i (26).

Podstawą stabilnego schematu całkowania równań (52) i (53) względem czasu jest następujący rozkład równania (52):

$$\rho_0 \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial s_{ij}^{n+\theta_3}}{\partial x_j} + g_i^{n+\theta_3} \quad (54)$$

$$\rho_0 \frac{v_i^{n+1} - v_i^*}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (55)$$

gdzie v_i^* jest zwana prędkością cząstkową (ang. "fractional" velocity). Należy zwrócić uwagę, że równania (54) i (55) dają w sumie równanie (52).

W równaniu (53) zakładamy $\theta_1 = 1$, a następnie wstawiając równanie (55) otrzymujemy

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} = -\frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} + \Delta t \frac{\partial^2 p^{n+\theta_2}}{\partial x_i^2} \quad (56)$$

Równania (54), (55) i (56) definiują następujący schemat całkowania względem czasu:

- 1) Obliczenie prędkości cząstkowej z równania (54)

$$v_i^* = v_i^n + \rho_0 \frac{\Delta t}{\rho_0} \left(\frac{\partial s_{ij}^n}{\partial x_j} + g_i^n \right) \quad (57)$$

- 2) Obliczenie ciśnienia p^{n+1} z równania (56)

- 3) Obliczenie prędkości końcowej z równania (55)

$$v_i^{n+1} = v_i^* - \frac{\Delta t}{\rho_0} \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (58)$$

W równaniu (57) założono $\theta_3 = 0$, co oznacza wybór jawnego rozwiązania dla tego równania. Rozwiązanie to charakteryzuje się wszystkimi zasadniczymi zaletami schematów jawnych, które zostały omówione wcześniej. Rozwiązanie jawne wprowadza również ograniczenie na krok całkowania Δt_{crit} , por. (Hughes 1987):

$$\Delta t_{\text{crit}} \leq \frac{h^2}{2\nu} \quad (59)$$

gdzie $\nu = \mu/\rho_0$, a h jest najmniejszym wymiarem elementu. W równaniach (56) i (58) pozostawiono wybór charakteru rozwiązania, dla $\theta_2 = 0$ schemat całkowania jest w pełni jawny, natomiast dla $\theta_2 = 1$ ciśnienie wyznaczone jest w sposób niejawny.

Wprowadzając do równań (57), (55) i (58) dyskretyzację prędkości i ciśnień analogiczną do określonej równaniami (27) i (28), a następnie stosując standardową metodę Galerkinia otrzymuje się równania macierzowe dla powyższego schematu całkowania

Krok 1:

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}}^n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_v - \mathbf{K} \bar{\mathbf{v}}^n) \quad (60)$$

Krok 2:

$$\frac{1}{\Delta t} \tilde{\mathbf{M}} (\bar{\mathbf{p}}^{n+1} - \bar{\mathbf{p}}^n) = -\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{v}}^* - \Delta t \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}}^{n+\theta_2} - \mathbf{f}_p \quad (61)$$

Krok 3:

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^* - \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\theta_2 \mathbf{Q} \bar{\mathbf{p}}^{n+1} + (1 - \theta_2) \mathbf{Q} \bar{\mathbf{p}}^n) \quad (62)$$

gdzie \mathbf{H} jest standardową macierzą dla dyskretnego operatora Laplace'a

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \frac{1}{\rho_0} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \quad (63)$$

Pozostałe wektory i macierze są zdefiniowane równaniami (36)–(41).

Po obliczeniu prędkości można wyznaczyć przemieszczenia punktów węzłowych z zależności

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\bar{\mathbf{v}}^n + \bar{\mathbf{v}}^{n+1}) \quad (64)$$

Intuicyjne wyjaśnienie skuteczności powyższego algorytmu w eliminacji blokady objętościowej daje rozpatrzenie zagadnienia ruchu ustalonego, kiedy

$$\bar{\mathbf{v}}^{n+1} = \bar{\mathbf{v}}^n = \bar{\mathbf{v}} \quad (65)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^{n+1} = \bar{\mathbf{p}}^n = \bar{\mathbf{p}} \quad (66)$$

Wtedy równania (60)–(63) sprowadzają się do następujących zależności

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathbf{v}} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_v^{(1)} - \mathbf{K} \bar{\mathbf{v}}) \quad (67)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^* + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Q} \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_v^{(2)}) \quad (68)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{v}}^* + \Delta t \mathbf{H} \bar{\mathbf{p}} \quad (69)$$

Po wyeliminowaniu $\bar{\mathbf{v}}^*$ otrzymuje się układ równań w następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & \Delta t (\mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Jak widać podmacierz na przekątnej związana z ciśnieniem nie jest zerowa. Daje ona pożądaną stabilizację objętościową. Można dowieść (por. (Codina 1995)), że występująca na przekątnej podmacierz $\mathbf{Q}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{H}$ jest zawsze dodatnio określona, co zapewni dobre uwarunkowanie równań (70).

6. MODEL MATERIAŁU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO

Aczkolwiek w wielu przypadkach model materiału sztywno-plastycznego lub sztywno-lepkoplastycznego jest zupełnie wystarczający do opisu procesów przeróbki plastycznej, nieraz pożądanym jest uwzględnienie efektów sprężystych, co jest możliwe przy zastosowaniu modeli sprężysto-plastycznych lub sprężysto-lepkoplastycznych znanych z mechaniki ciała stałego. Rozwinięty w ramach mechaniki płynów algorytm CBS

został rozszerzony na zagadnienia mechaniki ciała stałego przez Zienkiewicza (Zienkiewicz i in. 1998). Dostosowanie algorytmu opisanego równaniami (60)–(62) do zagadnienia mechaniki ciała stałego jest proste. Wystarczy na podstawie równań (33) i (38) zapisać występujący w równaniu (60) człon $\mathbf{K} \bar{\mathbf{v}}$ jako

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{v}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{s} d\Omega \quad (71)$$

gdzie \mathbf{s} może być otrzymane na podstawie dowolnego prawa konstytutywnego z mechaniki ciała stałego. Powyższa forma jest również prawdziwa w ramach mechaniki płynów.

Równanie konstytutywne dla ciała sprężysto-plastycznego można zapisać w postaci różniczkowej

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} \mathbf{d} \quad (72)$$

gdzie \mathbf{C}^{ep} jest sprężysto-plastycznym tensorem konstytutywnym, \mathbf{d} jest symetryczną częścią gradientu prędkości deformacji \mathbf{L}

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (73)$$

a $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ przedstawia obiektywną pochodną tensora naprężenia Cauchy'ego, często jest to pochodna Jaumanna-Zaremby ($\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_J$) lub Truesdella ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}_T (\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_T)$)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_T = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \quad (74)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_T = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{L}) \quad (75)$$

gdzie $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ jest pochodną materialną naprężenia Cauchy'ego, a $\boldsymbol{\omega}$ jest anty-symetryczną częścią gradientu prędkości deformacji \mathbf{L}

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (76)$$

Uaktualnianie naprężeń wymaga całkowania w punkcie materialnym

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt \quad (77)$$

przy czym należy uwzględnić definicję odpowiedniej pochodnej obiektywnej, np. (74) lub (75), oraz różniczkowe równanie konstytutywne (72). Znając naprężenie Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$, można wyznaczyć dewiator naprężenia \mathbf{s} na podstawie równania (4).

Przedstawiona procedura jest znacznie bardziej skomplikowana niż wyznaczanie naprężeń dla płynu lepkiego na podstawie równania (13), dlatego kiedy tylko możliwe stosowanie mod-

elu materiału sztywno-plastycznego lub lepko-plastycznego jest znacznie wygodniejsze.

Alternatywnym sformułowaniem modelu ciała sprężysto-plastycznego pozwalającym uniknąć całkowania naprężeń jest sformułowanie zakładające tzw. hiper-sprężystość materiału. Założeniem wyjściowym w modelu hiper-sprężystym jest istnienie potencjału ψ takiego, że

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (78)$$

gdzie \mathbf{S} i \mathbf{E}^e są sprzężonymi miarami naprężenia i sprężystej części odkształcenia, np. drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa i tensor odkształcenia Greena-Lagrange'a. Znając drugi tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa \mathbf{S} można wyznaczyć tensor naprężenia Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (79)$$

gdzie

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (80)$$

Model materiału sprężysto-plastycznego stosowany w programie numerycznym Stampack, w którym implementowano algorytm eliminacji blokady objętościowej, oparty jest na założeniu hiper-sprężystości (García Garino i Oliver 1992a; 1992b, García Garino 1993). W modelu tym w opisie dużych odkształceń sprężysto-plastycznych zakłada się multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji \mathbf{F} na część sprężystą \mathbf{F}^e i plastyczną \mathbf{F}^p

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (81)$$

który wprowadza beznaprężeniową konfigurację pośrednią. W sformułowaniu ogólnym (zob. Dodatek) wszystkie związki konstytutywne definiuje się w konfiguracji pośredniej, a następnie transformuje się je do konfiguracji odkształconej lub oryginalnej. Na podstawie rozkładu wyrażonego równaniem (81) przez odpowiednią definicję tensorów odkształcenia w konfiguracji pośredniej (zobacz Dodatek) otrzymuje się w konfiguracji odkształconej addytywną zależność

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (82)$$

wiążącą całkowity, sprężysty i plastyczny tensor Almansięgo \mathbf{e} , \mathbf{e}^e i \mathbf{e}^p , które są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^e &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1}), \\ \mathbf{e}^p &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}), \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \end{aligned} \quad (83)$$

Poprzez zastosowanie pochodnej Lie do równania (82) otrzymuje się addytywny rozkład symetrycznej części tensora gradientu prędkości deformacji

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (84)$$

Ogólne sformułowanie modelu jest zamieszczone w Dodatku. W zastosowaniu do metali opisywany model można uprościć poprzez założenie, że odkształcenia sprężyste są małe. Dzięki temu można przyjąć prostą funkcję energii swobodnej

$$\psi = \psi^e(\mathbf{e}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (85)$$

$$\psi^e = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e)^2 + \mu (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \quad (86)$$

gdzie ψ^e i ψ^p są częściami sprężystą i plastyczną energii swobodnej, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ jest efektywnym odkształceniem plastycznym, λ i μ są stałymi Lamé. Przy tej postaci potencjału sprężystego tensor naprężeń Kirchhoffa $\boldsymbol{\tau}$ otrzymuje się z następującej zależności

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e) + 2\mu \mathbf{e}^e \quad (87)$$

Kolejnym uproszczeniem możliwym dzięki założeniu, że ściślność jest niewielka, jest przyjęcie, że tensor naprężeń Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ jest w przybliżeniu równy tensorowi naprężeń Kirchhoffa $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\tau} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}^e) + 2\mu \mathbf{e}^e \quad (88)$$

W uproszczonym modelu zakłada się stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (89)$$

z warunkiem plastycznego płynięcia Hubera-Misesa

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0 \quad (90)$$

gdzie \mathbf{s} jest dewiatorem tensora naprężeń Cauchy'ego. Uwzględnione jest izotropowe wzmocnienie w postaci

$$\sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_{Y0} + H \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (91)$$

lub

$$\sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = K(a + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^n \quad (92)$$

gdzie H , K , a i n są stałymi określającymi krzywe umocnienia metalu. Implementowany jest również model z dowolną krzywą umocnienia zdefiniowaną poprzez zbiór punktów.

Poprawność przedstawionego powyżej modelu konstytutywnego została zweryfikowana na licznych przykładach przeróbki plastycznej na zimno (García Garino i Oliver 1992a; 1992b, García Garino 1993). Wraz z algorytmem prędkości cząstkowej w został on wykorzystany w przykładach numerycznych zamieszczonych w następnym rozdziale.

7. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

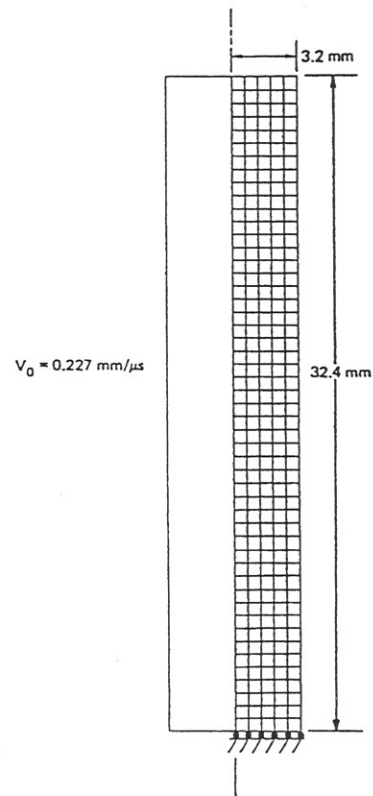
7.1. Uderzenie pręta cylindrycznego w sztywną płaszczyznę

Jest to często używany przykład testowy dla weryfikacji programów do symulacji obciążeń dynamicznych, doskonale sprawdzający poprawność modelowania odkształcenia sprężysto-plastycznego materiału (Hallquist 1986).

Miedziany pręt cylindryczny o promieniu 3.2 mm i długości 32.4 mm poruszający się z prędkością 227 m/s uderza w sztywną płaszczyznę (rys. 1). Własności materiału są następujące: moduł Younga, $E = 117$ GPa; współczynnik Poissona, $\nu = 0.35$; granica plastyczności, $\sigma_y = 0.4$ GPa; moduł wzmocnienia izotropowego, $H = 0.1$ GPa. Analizowano okres 80 μ s od chwili uderzenia, w którym to czasie osiągnięty zostaje stan quasi-statycznej równowagi. Przy modelowaniu oddziaływania pręta i sztywnej ściany założono kontakt bez możliwości oderwania.

Końcowe kształty pręta po 80 μ s osiągnięte w dwuwymiarowej analizie osiowo-symetrycznej przy zastosowaniu różnych sformułowań MES pokazane są na rys. 2. Standardowe sformułowanie przemieszczeniowe dla elementów czworokątnych i trójkątnych daje błędne rozwiązanie powodu występującej blokady objętościowej (rys. 2a i b). Zastosowanie sformułowania mieszanego z elementami czworokątnymi Q1/P0 z biliniową interpolacją przemieszczeń i ciśnieniem stałym w elemencie daje poprawne rozwiązanie problemu i kształt końcowy pokazany na rys. 2c. Właściwie identyczny kształt nie wykazujący blokady objętościowej pokazany jest na rys. 2d i e dla rozwiązań uzyskanych przy zastosowaniu rozwiniętej metody stabilizacyjnej oraz elementów czworokątnych z biliniową interpolacją

przemieszczeń i ciśnienia i elementów trójkątnych z liniową interpolacją przemieszczeń i ciśnienia.

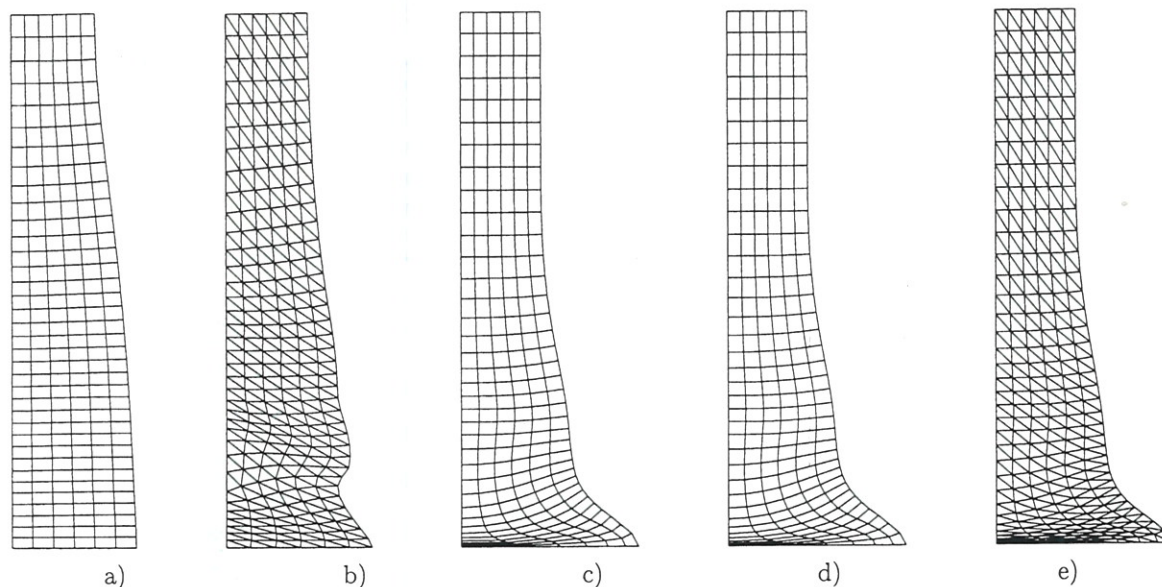


Rysunek 1. Uderzenie cylindrycznego pręta w sztywną płaszczyznę – definicja geometrii i warunków brzegowych.

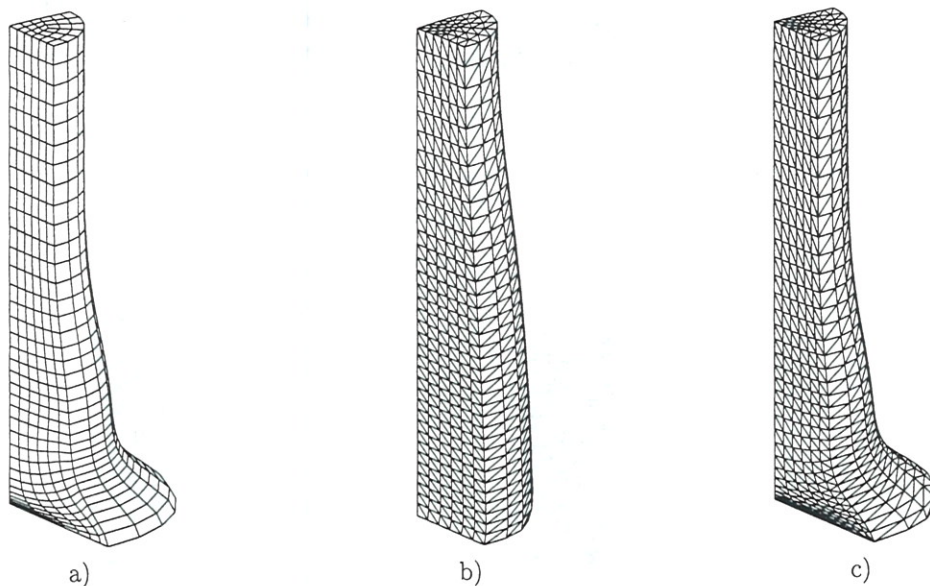
Różne rozwiązania trójwymiarowe są przedstawione na rys. 3, dwa z nich są rozwiązaniami poprawnymi (rys. 3a i c), a jedno (rys. 3b) jest błędne z powodu blokady objętościowej.

Rozwiązania przedstawione na rys. 2d,e oraz 3c demonstrują skuteczność metody CBS w eliminacji blokady objętościowej. Poprawność metody można stwierdzić poprzez ilościowe porównania przedstawione w tabeli 1. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu metody CBS są zgodne z wynikami uzyskanymi za pomocą elementów nie wykazujących blokady objętościowej w standardowym sformułowaniu mieszanym.

Zgodność otrzymanych wyników przy zastosowaniu dyskretyzacji liniowymi trójkątami i czworokątami oraz przedstawionej metody stabilizacyjnej z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu dyskretyzacji czworokątami Q1/P0 zachodzi również dla rozkładów ciśnienia hydrostatycznego (rys. 4) i efektywnego odkształcenia plastycznego (rys. 5).



Rysunek 2. Różne rozwiązania osiowosymetryczne przykładu uderzenia pręta w sztywną przeszkodę przy założonym kontakcie bez odrywania: a) biliniowe czworokąty – sformułowanie przemieszczeniowe, b) liniowe trójkąty – sformułowanie przemieszczeniowe, c) biliniowe czworokąty $Q1/P0$ – standardowe sformułowanie mieszane, d) biliniowe czworokąty $Q1/P1$ – metoda CBS, e) liniowe trójkąty $T1/P1$ – metoda CBS.



Rysunek 3. Różne rozwiązania trójwymiarowe przykładu uderzenia pręta w sztywną przeszkodę przy założonym kontakcie bez odrywania: a) trzyliniowe sześciiany $Q1/P0$ – standardowe sformułowanie mieszane, b) liniowe czworościany $Q1/P1$ – standardowe sformułowanie mieszane, c) liniowe czworościany $Q1/P1$ – metoda CBS.

7.2. Zgniatanie walca

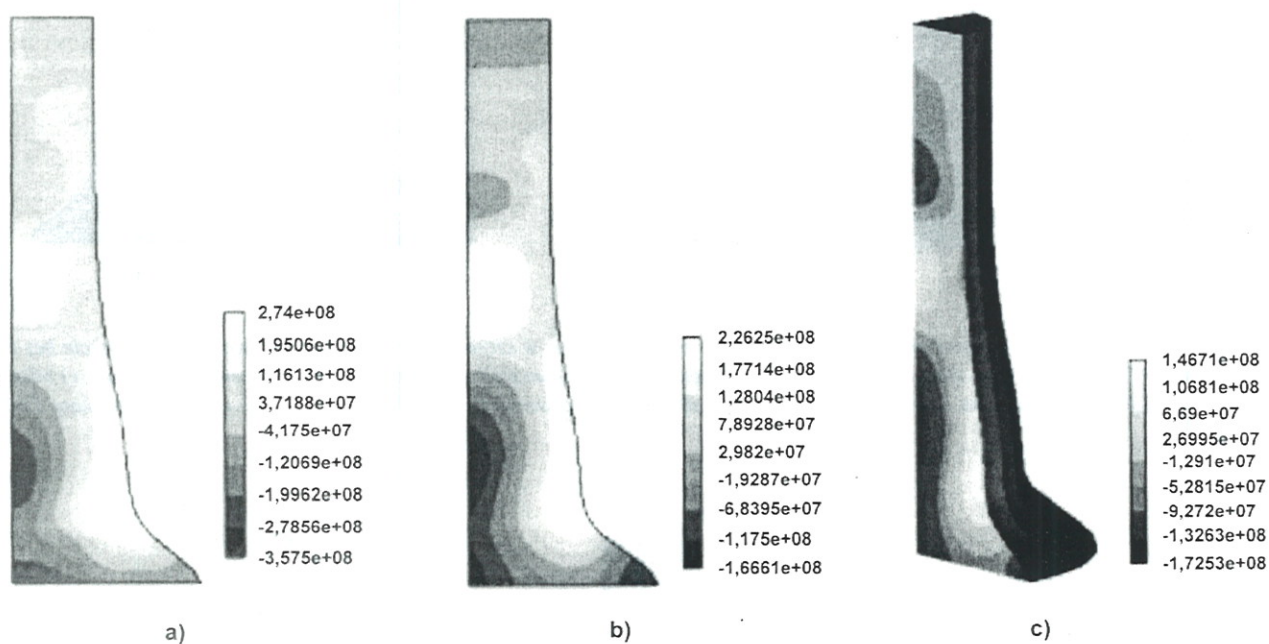
Przykład ten ma na celu zweryfikowanie rozwiniętej metody w zastosowaniu do prostego procesu przeróbki plastycznej na zimno. Walec stalowy o długości 100 mm oraz promieniu 100 mm jest zgniatany między dwiema płaskimi płytami równoległymi do jego osi (rys. 6),

odległość między płytami na koniec procesu wynosi 100 mm. Własności materiału są następujące: moduł Younga $E = 2.17 \cdot 10^5$ MPa, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, gęstość 783 kg/m^3 , początkowa granica plastyczności $\sigma_{Y0} = 170 \text{ MPa}$, moduł wzmocnienia $H = 30 \text{ MPa}$. Tarcie na powierzchniach kontaktu materiału z płytami określone jest współczynnikiem tarcia Coulomba $\mu = 0.2$. Pominięto efekty ter-

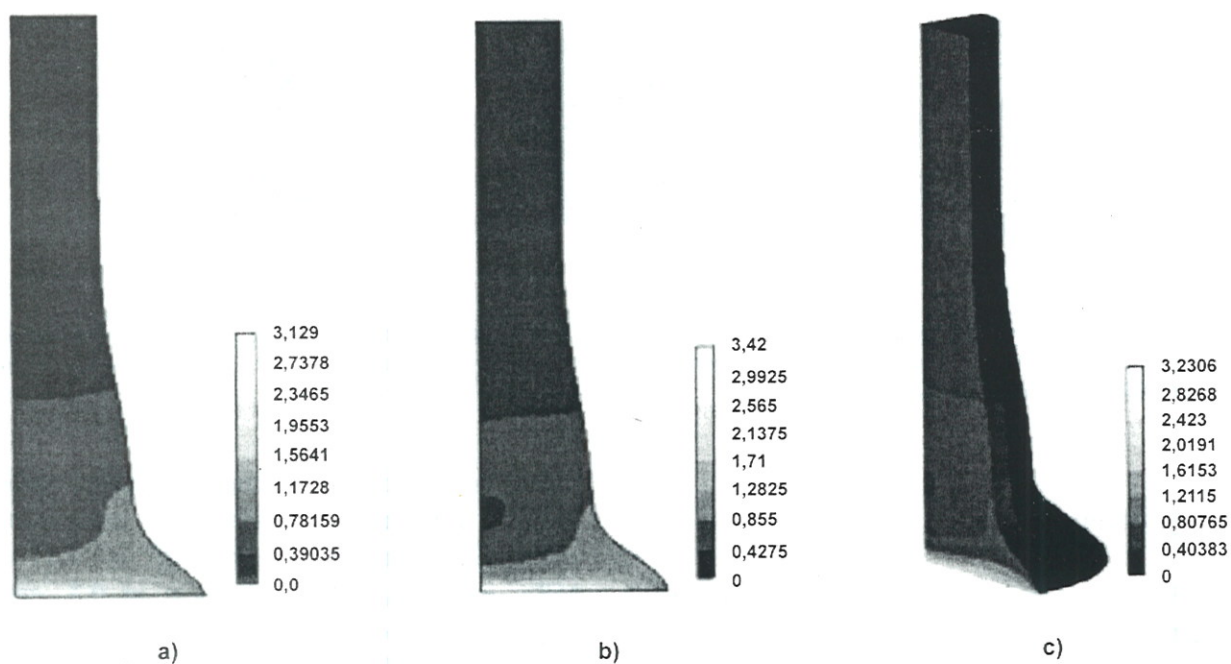


Tablica 1. Porównanie wyników dla różnych sformułowań.

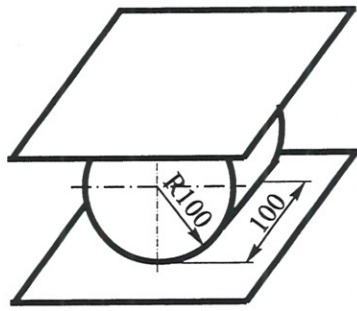
| Typ elementu | Sformułowanie | Promień końcowy | Długość końcowa |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 8-węzł. sześcián | Stand. mieszane | 7,11 | 21,48 |
| 4-węzł. czworokąt | Stand. mieszane | 7,10 | 21,47 |
| 4-węzł. czworokąt | Met. CBS | 7,10 | 21,47 |
| 4-węzł. czworoscian | Met. CBS | 7,20 | 21,94 |
| 3-węzł. trójkąt | Met. CBS | 7,07 | 21,47 |



Rysunek 4. Rozkład ciśnienia dla różnych rozwiązań: a) biliniowe czworokąty Q1/P0 – standardowe sformułowanie mieszane, b) liniowe trójkąty – metoda CBS, c) liniowe czworosciany Q1/P1 – metoda CBS.



Rysunek 5. Rozkład efektywnego odkształcenia plastycznego dla różnych rozwiązań: a) biliniowe czworokąty Q1/P0 – standardowe sformułowanie mieszane, b) liniowe trójkąty – metoda CBS, c) liniowe czworosciany Q1/P1 – metoda CBS.

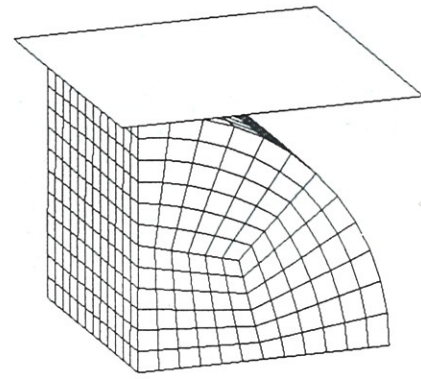


Rysunek 6. Zgniatanie walca – definicja geometrii.

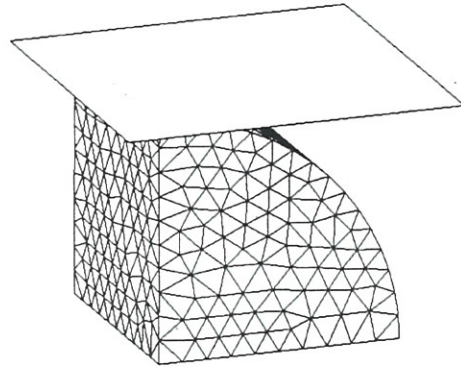
miczne. Analizę termo-mechaniczną podobnego problemu przeprowadzono w (Rojek 2000), osiągnięta maksymalna temperatura jest stosunkowo niska (około 70°C), a więc możliwe jest założenie w tym zagadnieniu własności mechanicznych niezależnych od temperatury.

W modelowaniu wykorzystano symetrię i rozpatrywano ćwiartkę walca. Analizę przeprowadzono stosując dyskretyzację czworościennymi elementami liniowymi wraz z algorytmem CBS oraz dyskretyzację trójliniowymi elementami sześciennymi Q1/P0 opartymi na standardowym sformułowaniu mieszanym. Początkowe siatki elementów skończonych są przedstawione na rys. 7a i b.

Wyniki analizy w postaci odkształconych siatek z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego przedstawiono na rys. 8 dla siatki heksaedrycznej oraz na rys. 9 dla siatki tetraedrycznej. Wyniki uzyskane za pomocą obydwu siatek i dwu różnych sformułowań są podobne. Otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi za pomocą niejawnego programu MES Abaqus Implicit (ABAQUS - Example manual, 1996) zamieszczonymi na rys. 10. Widać zgodność kształtu, jak również zgodność rozkładu odkształceń plastycznych, występuje pewna rozbieżność w poziomie efektywnych odkształceń plastycznych — analiza niejawna Abaqusem daje maksymalne odkształcenia plastyczne 1.64, zaś analiza dynamiczna jawna za pomocą programu Stampack przewiduje 1.45 dla siatki heksaedrycznej i 1.32 dla siatki tetraedrycznej. Rozbieżność ta może wynikać z różnicy modeli konstytutywnych implementowanych w programie Abaqus i Stampack.

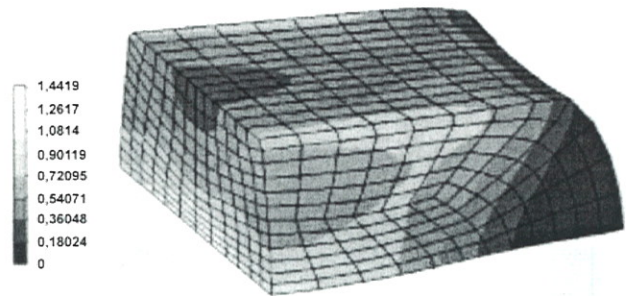


a)

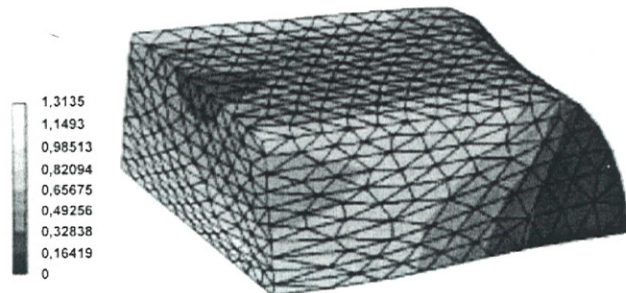


b)

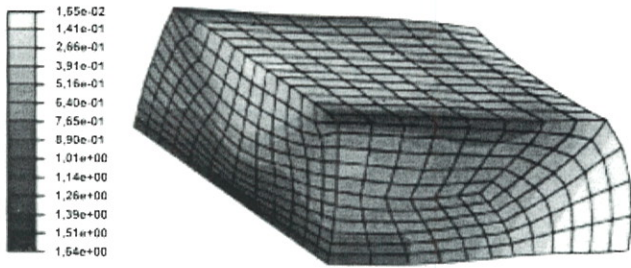
Rysunek 7. Zgniatanie walca – model MES: a) siatka heksaedryczna, b) siatka tetraedryczna.



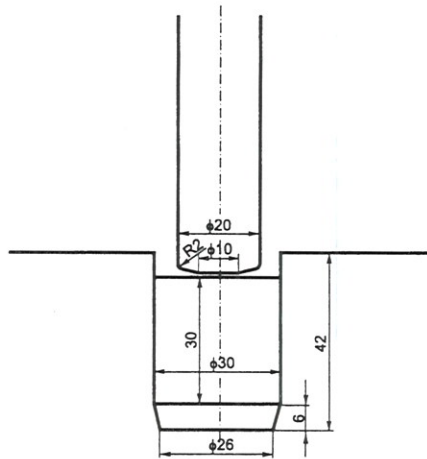
Rysunek 8. Zgniatanie walca – odkształcona siatka z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (rozwiązanie jawne programem Stampack, sformułowanie mieszane MES, siatka heksaedryczna).



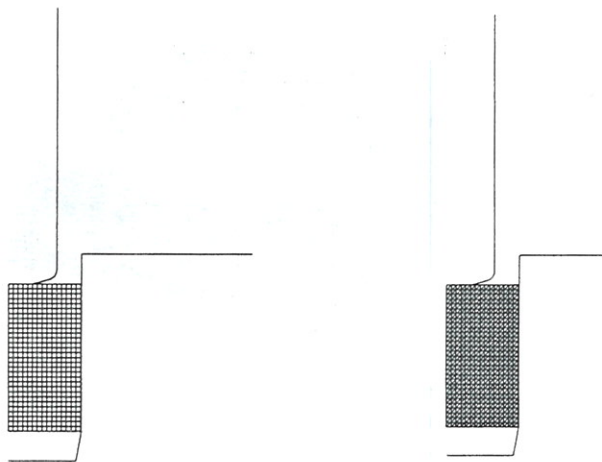
Rysunek 9. Zgniatanie walca – odkształcona siatka z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (rozwiązanie jawne programem Stampack, metoda CBS, siatka tetraedryczna).



Rysunek 10. Zgniatanie walca – odkształcona siatka z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (rozwiązanie niejawnym programem Abaqus/Implicit).



a)



b)

c)

Rysunek 11. Wyciskanie przeciwbieżne: a) definicja geometrii, b) początkowa siatka czworokątów, c) początkowa siatka trójkątów.

7.3. Wyciskanie przeciwbieżne cylindra

W przykładzie tym zastosowano metodę CBS w połączeniu z algorytmem zmiany siatki. Przedmiotem analizy jest proces wyciskania na zimno naczynia cylindrycznego o średnicy zewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 5 mm (rys. 11). Mate-

riałem wyjściowym jest walec o długości 30 mm i średnicy 30 mm. Stempel o średnicy 20 mm ma zadany skok 28 mm. Własności materiału są następujące: moduł Younga $E = 3.24 \cdot 10^5$ MPa, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$, gęstość $\rho = 8120 \text{ kg/m}^3$, początkowa granica plastyczności $\sigma_{Y0} = 300$ MPa, moduł wzmocnienia $H = 50$ MPa. Tarcie określone jest współczynnikiem tarcia Coulomba $\mu = 0.1$. W modelu procesu pominięto efekty cieplne.

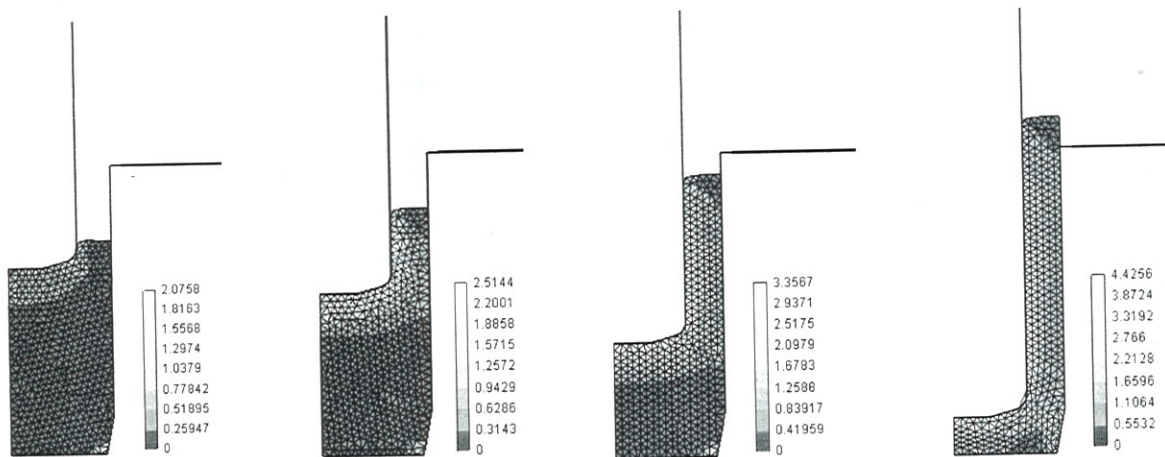
Definicja przykładu jest podobna do przykładu testowego komercyjnego programu MARC/Autoforge (MARC/AutoForge User's Guide 1995). Aczkolwiek w (MARC/AutoForge User's Guide 1995) analizowano zagadnienie sprzężone termo-mechaniczne, to własności materiału założono niezależne od temperatury, umożliwia to porównanie wynikami naszej analizy z wynikami uzyskanymi za pomocą uznanego programu do symulacji procesów przeróbki plastycznej, jakim jest program MARC/Autoforge (MARC/AutoForge User's Guide 1995).

Osiowosymetryczną analizę przeprowadzono stosując dyskretyzację trójkątnymi elementami liniowymi wraz z algorytmem CBS oraz dyskretyzację biliniowymi elementami czworokątnymi Q1/P0 opartymi na standardowym sformułowaniu mieszanym. Początkowe siatki elementów skończonych są przedstawione na rys. 11b i c.

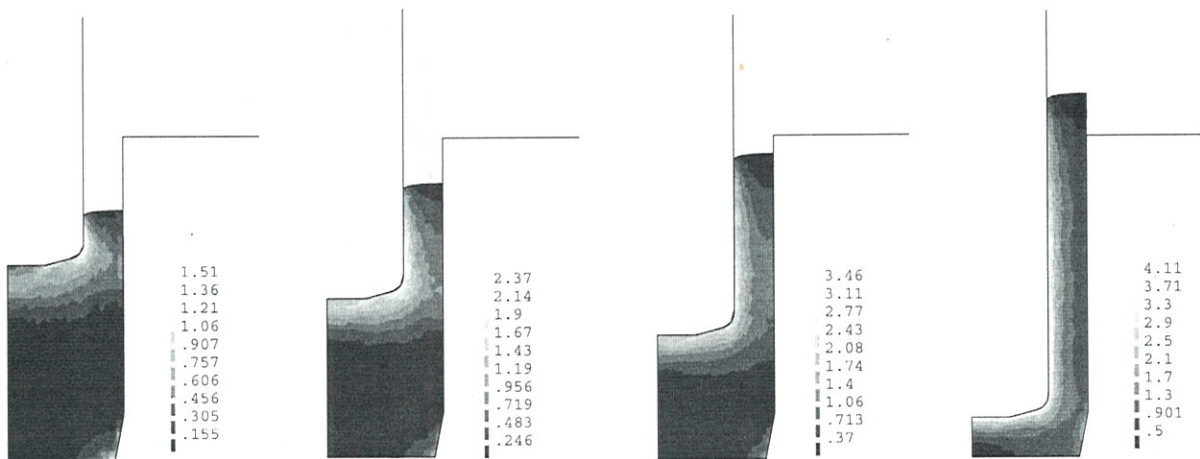
Uzyskane wyniki dla siatki trójkątnej w postaci odkształconej konfiguracji z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego na różnych etapach formowania przedstawiono na rys. 12. W podobny sposób przedstawiono na rys. 13 wyniki analizy z zastosowaniem siatki czworokątów.

Uzyskane w obliczeniach programem Stampack największe wartości efektywnego odkształcenia plastycznego, 4,43 dla siatki trójkątnej i 4,36 dla siatki czworokątnej, doskonale zgadzają się z wartością 4,46 przewidywaną przez program MARC/AutoForge (MARC/AutoForge User's Guide 1995). Uzyskane rozkłady efektywnego odkształcenia plastycznego (rys. 12 i 13) są zgodne z rozkładem otrzymanym z programu MARC/AutoForge (MARC/AutoForge User's Guide 1995) jak również odpowiadają znanemu rozkładowi umocnienia materiału naczynia wyciskanego przeciwbieżnie (Erbel i in. 1981). Rozkład odkształcenia plastycznego wskazuje na zwiększające się umocnienie materiału wzdłuż wysokości w kierunku od obrzeża do dna osiągając maksimum w pobliżu przejścia ścianki w dno. W kierunku normalnym do bocznej ścianki naczy-

nia występują znaczne różnice umocnienia — materiał leżący w pobliżu powierzchni wewnętrznej jest bardziej umocniony.



Rysunek 12. Wyciskanie przeciwbieżne – ewolucja kształtu z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (siatka trójkątna, metoda CBS).



Rysunek 13. Wyciskanie przeciwbieżne – ewolucja kształtu z rozkładem efektywnego odkształcenia plastycznego (siatka czworokątna, sformułowanie mieszane).

WNIOSKI KOŃCOWE

Wyniki symulacji numerycznych potwierdzają poprawność opracowanych sformułowań teoretycznych, rozwinięta metoda stabilizacji zwana metodą CBS (albo metodą prędkości cząstkowej) skutecznie eliminuje blokadę objętościową w przypadkach gdy zawodzi standardowe sformułowanie mieszane, dzięki czemu możliwe jest zastosowanie siatek trójkątnych i czworokątnych. Przedstawiona metoda w połączeniu z modelem materiału opisującym duże odkształcenia sprężysto-plastyczne metali została z powodzeniem zastosowana do symulacji prostych przykładów testowych przeróbki plastycznej na

zimno. Uzyskano dobre wyniki, co pozwala stwierdzić, że opracowany program numeryczny jest dobrym i efektywnym narzędziem do tego typu zastosowań.

W rozpatrywanym modelu dla uproszczenia pominięto efekty termiczne. Rozszerzenie przedstawionego sformułowania na zagadnienia termomechaniczne przedstawiono w (Rojek 2000, Rojek i in. 2000).

LITERATURA

- ABAQUS - Example manual, 1996, Version 5.6, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
 Babuška L, 1973, *The finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., 20, 179-192.



- Belytschko T., Liu W.K., Moran B., 2000, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley.
- Brezzi F., Pitkäranta J., 1984, On the stabilization of finite element approximations of Stokes problem, *Efficient Solutions of Elliptic Problems. Notes on Numerical Fluid Mechanics*, vol. 10, ed. Hackbush W., Vieweg, Wiesbaden, 11-19.
- Codina R., Vazquez M., Zienkiewicz O.C., 1995, A fractional step method for compressible flows: Boundary conditions and incompressible limit, *Proc. Int. Conf. on Finite Elements in Fluids - New Trends and Applications*, Venezia, 409-418.
- Erbel S., Kuczyński K., Marciniak Z., 1981, *Obróbka plastyczna*, PWN.
- Garcia Garino C., Oliver J., 1992a, A numerical model for elastoplastic large strain problems, *Computational Plasticity*, ed., Owen D.R.J. i in.
- Garcia Garino C., Oliver J., 1992b, Use of a large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes, *NUMIFORM '92*, eds., J.L. Chenot i in., Balkema.
- Garcia Garino C., 1993, *A Numerical Model for the Analysis of Large Elasto-plastic Deformations of Solids*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, (in Spanish).
- Hallquist J.O., 1986, *NIKE2D - A Vectorized Implicit, Finite Deformation Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 2-D Solids with Interactive Reasoning and Graphics*, Lawrence Livermore National Laboratory.
- Hallquist J.O., 1998, *LS-DYNA. Theoretical Manual*, Livermore Software Technology Corporation.
- Hughes T.J.R., Franca L.P., Balestra M., 1986, A new finite element formulation for fluid dynamics, V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal order interpolation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 59, 85-99.
- Hughes T.J.R., 1987, *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Analysis*, Prentice-Hall.
- Krupowicz A., 1986, *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN.
- MARC/AutoForge User's Guide, 1995, Version 2.2.
- Oñate E., Agelet de Saracibar C., 1992a, Numerical modelling of sheet metal forming problems, *Numerical Modelling of Material Deformation Processes: Research, Developments and Applications*, ed. Hartley P. et al., Springer-Verlag.
- Oñate E., Agelet de Saracibar C., 1992b, Alternatives for finite element analysis of sheet metal forming problems, *NUMIFORM '92*, eds. Chenot J.L., Wood R., Zienkiewicz O.C., Balkema.
- Oñate E., Rojek J., Garcia Garino C., 1995, NUMIS-TAMP: a research project for assesment of finite element models for stamping processes, *J. Mat. Proc. Technology*, 50, 1-4, 17-38.
- PAM-STAMP. User's Manual, 1998, ESI, France.
- Rojek J., Oñate E., Postek E., 1998, Application of explicit FE codes to simulation of sheet and bulk metal forming processes, *J. Mat. Proc. Technology*, 80-81, 620-627.
- Rojek J., 2000, Symulacja procesów obróbki plastycznej przy zastosowaniu programu MES opartego na jawnym całkowaniu w czasie, *Materiały VII Konferencji Zastosowanie Komputerów w Zakładach Przetwórstwa Metali KomPlasTech 2000*, eds. Kusiak J. i in., Krynica-Czarny Potok.
- Rojek J., Zienkiewicz O.C., Oñate E., Taylor R.L., 2000, Simulation of metal forming using new formulation of triangular and tetrahedral elements, *Proc. 8th Int. Conf. on Metal Forming, Metal Forming 2000*, eds. Pietrzyk i in., Kraków.
- Zienkiewicz O.C., Codina R., 1995, A general algorithm for compressible and incompressible flow - Part I. The split, characteristic based scheme, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20, 869-885.
- Zienkiewicz O.C., Morgan K., Satya Sai B.V.K., Coding R., Vazquez M., 1995, A general algorithm for compressible and incompressible flow - Part I. Tests on the explicit form, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20, 887-913.
- Zienkiewicz O.C., Rojek J., Taylor R.L., Pastor M., 1998, Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 33, 565-583.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., 2000, *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, London.

DODATEK

Hipersprężysty model materiału sprężysto-plastycznego

Niniejszy dodatek przedstawia bardziej szczegółowo model materiału sprężysto-plastycznego stosowany w programie numerycznym Stampack, w którym implementowano prezentowane w niniejszym artykule algorytmy. Model jest oparty na sformułowaniu rozwiniętym w pracy (García Garino 1993). W opisie dużych odkształceń sprężysto-plastycznych zakłada się multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji \mathbf{F} na część sprężystą \mathbf{F}^e i plastyczną \mathbf{F}^p

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (\text{D.1})$$

gdzie $\bar{\mathbf{X}}$ jest wektorem położenia punktu w konfiguracji pośredniej. W konfiguracji pośredniej definiuje się odpowiednie tensory odkształcenia, $\bar{\mathbf{E}}^e$, $\bar{\mathbf{E}}^p$ i $\bar{\mathbf{E}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}^e &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{I}), \\ \bar{\mathbf{E}}^p &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{p-T} \mathbf{F}^{p-1}), \\ \bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{F}^{p-T} \mathbf{F}^{p-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

spełniające addytywną zależność

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}^e + \bar{\mathbf{E}}^p \quad (\text{D.3})$$

Stosując do tensorów $\bar{\mathbf{E}}^e$, $\bar{\mathbf{E}}^p$ i $\bar{\mathbf{E}}$ operację *pull-back* z konfiguracji pośredniej na konfigurację oryginalną otrzymuje się odpowiednio sprężysty, plastyczny i całkowity tensory Greena-Lagrange'a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^e &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p), \\ \mathbf{E}^p &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p - \mathbf{I}), \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

spełniająca zależność

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad (\text{D.5})$$

Z kolei operacja *push-forward* na konfiguracje odkształconą zastosowana do tensorów $\bar{\mathbf{E}}^e$, $\bar{\mathbf{E}}^p$ i $\bar{\mathbf{E}}$ daje odpowiednio sprężysty, plastyczny i całkowity tensor Almansiego

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^e &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1}), \\ \mathbf{e}^p &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{e-T} \mathbf{F}^{e-1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}), \\ \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

również związane addytywną zależnością

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (\text{D.7})$$

Związki addytywne zachodzą również dla odpowiednich tensorów prędkości odkształcenia w konfiguracji oryginalnej, pośredniej i odkształconej:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p, \\ \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{D}}^e + \bar{\mathbf{D}}^p, \\ \mathbf{d} &= \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Tensor prędkości odkształcenia w konfiguracji oryginalnej $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{E}}^e$, $\dot{\mathbf{E}}^p$ uzyskuje się jako pochodne materialne tensorów Greena-Lagrange'a \mathbf{E} , \mathbf{E}^e , \mathbf{E}^p . W konfiguracji pośredniej i odkształconej tensor $\bar{\mathbf{D}}$, $\bar{\mathbf{D}}^e$ i $\bar{\mathbf{D}}^p$ oraz \mathbf{d} , \mathbf{d}^e i \mathbf{d}^p uzyskuje się poprzez zastosowanie pochodnej Lie do tensorów odkształcenia $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{E}}^e$ i $\bar{\mathbf{E}}^p$ oraz \mathbf{e} , \mathbf{e}^e i \mathbf{e}^p :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= L_v(\bar{\mathbf{E}}), \\ \bar{\mathbf{D}}^e &= L_v(\bar{\mathbf{E}}^e), \\ \bar{\mathbf{D}}^p &= L_v(\bar{\mathbf{E}}^p) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= L_v(\mathbf{e}), \\ \mathbf{d}^e &= L_v(\mathbf{e}^e), \\ \mathbf{d}^p &= L_v(\mathbf{e}^p) \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Podstawowe zależności konstytutywne również formułuje się w konfiguracji pośredniej (García Garino i Oliver 1992a, García Garino 1993). Postuluje się istnienie funkcji energii swobodnej $\bar{\Psi}$

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) + \bar{\Psi}^p(\bar{\mathbf{Q}}) \quad (\text{D.11})$$

gdzie $\bar{\Psi}^e$ i $\bar{\Psi}^p$ są częściami sprężystą i plastyczną energii swobodnej, a $\bar{\mathbf{Q}}$ zbiór odpowiednich parametrów wewnętrznych. Wprowadza się potencjał plastycznego płynięcia $\bar{G}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\mathbf{Q}})$ oraz warunek plastyczności $\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{E}}^e), \bar{\mathbf{Q}})$. Na podstawie nierówności Clausiusa-Duhema

$$\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}} - \dot{\bar{\Psi}} \geq 0 \quad (\text{D.12})$$

można otrzymać wyrażenie na naprężenia analogiczne do równania (78)

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} \quad (\text{D.13})$$

W ogólnym przypadku postuluje się niestowarzyszone prawo płynięcia w postaci

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (\text{D.14})$$

Model uzupełniony jest poprzez warunki obciążenia-odciążenia oraz prawo ewolucji parametrów wewnętrznych.

Wszystkie zależności konstytutywne można przetransformować do konfiguracji oryginalnej lub odkształconej (García Garino 1993). W sformułowaniu implementowanym w programie Stampack wykorzystuje się zależności w konfiguracji odkształconej. Po wyrażeniu funkcji sprężystej energii swobodnej w zależności od sprężystego tensora Almansiego

$$\bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e) = \psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e) \quad (\text{D.15})$$

otrzymuje się wyrażenie na tensor naprężenia Kirchhoffa

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e)}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (\text{D.16})$$

który jest związany z tensorem Almansiego $\boldsymbol{\sigma}$ zależnością

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D.17})$$

gdzie

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (\text{D.18})$$

Do konfiguracji odkształconej można przetransformować potencjał plastyczny \bar{G} i funkcję plastycznego płynięcia \bar{F}

$$\bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}) = g(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{F}^e) \quad (\text{D.19})$$

$$\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}) = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{F}^e) \quad (\text{D.20})$$

gdzie \mathbf{q} odpowiednie zmienne wewnętrzne. Prawo plastycznego płynięcia w konfiguracji odkształconej ma następującą postać

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (\text{D.21})$$

Kompletny opis modelu konstytutywnego jest zawarty w (García Garino 1993), zaś obszernie omówienie jest zamieszczone w (García Garino i Oliver 1992a; 1992b).