Wydawnictwo
Naukowe
AKAPIT

INFORMATYKA W TECHNOLOGII MATERIAŁÓW

Numer 2, Tom 1, Rok 2001

STACJONARNY ROZKŁAD CIEPŁA W OŚRODKU NIEJEDNORODNYM

BOGUSŁAW BOŻEK, $\boxed{\text{KONSTANTY HOLLY}}$

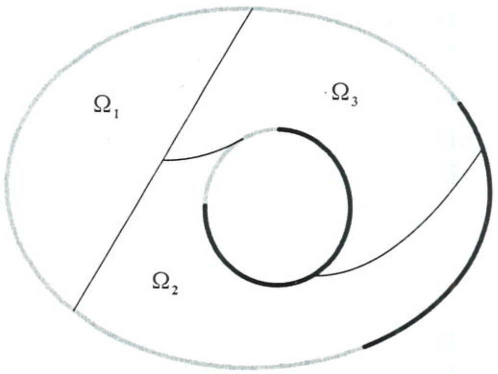
STATIONARY DISTRIBUTION OF HEAT IN THE NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

Abstract

The present paper supplements and continues Authors» earlier work on steady state analysis of heat flow in a non-homogeneous medium. A short survey of theory of mixed boundary-value problem for the stationary Fourier equation in a non-homogeneous medium in any Lipschitz domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ is presented. For $n = 2$ and $n = 3$ finite-element method of solving of this problem is developed.

1. STACJONARNY ROZKŁAD CIEPŁA W OŚRODKU NIEJEDNORODNYM – HEUREZA PROWADZĄCA DO DEFINICJI WARIACYJNEGO ROZWIĄZANIA

Niech $\mathbf{N} \ni n \geq 2$, $\mathbf{R}^n \supset \Omega$ - zbiór otwarty i ograniczony. $\Omega_1, \ldots, \Omega_s \in \operatorname{top} \Omega$ są parami rozłączne oraz $m\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j\right) = 0$, gdzie m miara Lebesque'a w $\mathbf{R}^n$.



Niech

$\sigma : \mathcal{B}(\partial\Omega) \to \mathbf{R}_+$ - element powierzchniowy,

$\mathbf{n} : \partial\Omega \to \mathbf{R}^n$ - normalna zewnętrzna względem Ω,

$\mathbf{n}_j : \partial\Omega_j \to \mathbf{R}^n$ - normalna wewnętrzna względem Ω_j,

$\partial_I\Omega \in \mathcal{B}(\partial\Omega)$.

Oznaczmy

$$\partial_{III}\Omega := (\partial\Omega) \setminus (\partial_I\Omega),$$

$$\partial_{III}\Omega_j := (\partial\Omega_j) \cap (\partial_{III}\Omega),$$

$$\partial_I\Omega_j := (\partial\Omega_j) \cap (\partial_I\Omega).$$

Dane:

$c_1, \ldots, c_s \in \mathbf{R}$,

$b : \partial_I\Omega \to \mathbf{R}$,

$\alpha, \beta : \partial_{III}\Omega \to \mathbf{R}$.

Interpretacja fizyczna:

Ω - niejednorodny obszar np. tłok silnika spalinowego,

B. Bożek, Akademia Górniczo-Hutnicza; K. Holly, Uniwersytet Jagielloński

ISSN 1641-8581

(Ω_j) - niejednorodne składowe,
(c_j) - stałe materiałowe,
b - temperatura na brzegu $\partial_I\Omega$,
α, β - współczynniki przenikalności cieplnej przez brzeg $\partial_{III}\Omega$.

Poszukujemy stacjonarnego rozkładu temperatury $T : \Omega \to \mathbf{R}$ jako rozwiązania zagadnienia brzegowego:

$$\begin{cases} \triangle[T] - \sum_{j=1}^{s} c_j \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j} \delta_{M_j} = 0 & \text{w} \quad \Omega \\ T = b & \text{na} \quad \partial_I\Omega \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} + \alpha T = \beta & \text{na} \quad \partial_{III}\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie
$M_j := \Omega \cap \partial\Omega_j$,
$\delta_{M_j}(\varphi) := \int_{M_j} \varphi d\sigma_j$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

σ_j - element powierzchniowy na $\partial\Omega_j$,
$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\delta_{M_j}\right)(\varphi) := \delta_{M_j}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\varphi\right)$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Powyższe sformułowanie zagadnienia zostało zainspirowane pracą (Bobula, 1990).

H e u r e z a

Z powyższego równania ciepła wynika, że funkcja T jest harmoniczna na każdym ze zbiorów Ω_j. Zauważmy, że

$$\partial\Omega_j = M_j \cup (\partial_I\Omega_j) \cup (\partial_{III}\Omega_j)$$

jest sumą rozłączną.

Rozważmy funkcję $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ klasy C^1 znikającą na $(\partial_I\Omega) \cup \bigcup_j M_j$. Wtedy uwzględniając fakt, że:
$\partial\Omega_j = M_j \cup (\partial_I\Omega_j) \cup (\partial_{III}\Omega_j)$
jest sumą rozłączną, oraz to, że φ znika na $M_j \cup \partial_I\Omega_j$ mamy:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \int_{\Omega_j} (\triangle T)\varphi dm = \sum_j \sum_i \int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\varphi dm = \\ &= \sum_j \sum_i \left(-\int_{\partial\Omega_j} (\mathbf{n}_j)_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\varphi d\sigma_j - \int_{\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dm\right) = \\ &= -\sum_j \left(\int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\varphi d\sigma_j + \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm\right) = \\ &= -\sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\varphi d\sigma_j - \sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm = \\ &= \sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\varphi d\sigma - \sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm = \\ &= \sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma - \sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm \end{aligned}$$

Wniosek 1 *Dla każdej funkcji $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ klasy C^1 znikającej na zbiorze $(\partial_I\Omega) \cup \bigcup_j M_j$ zachodzi*

$$\sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm = \sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma. \tag{2}$$

Niech z kolei $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy C^1 znikającą na $\partial\Omega$. Wtedy istnieje ciąg $(\psi_\nu) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbf{N}}$, taki że $\psi_\nu \to \psi$ w $H^1(\Omega)$.
Uwzględniając fakt, że że dla wszystkich $j \in \{1, \ldots, s\}$ funkcja ψ_ν znika na $(\partial\Omega_j) \setminus M_j$ oraz $\triangle\left(T_{|\Omega_j}\right) = 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\triangle[T] - \sum_j c_j \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\delta_{M_j}\right)(\psi_\nu) = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial [T]}{\partial x_i}\right)(\psi_\nu) - \sum_j c_j \int_{M_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\psi_\nu d\sigma_j = \\ &= -\sum_i \left[\frac{\partial T}{\partial x_i}\right]\left(\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_i}\right) - \sum_j c_j \int_{\partial\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\psi_\nu d\sigma_j = \\ &= -\sum_i \int_\Omega \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_i} dm - \sum_j c_j \int_{\partial\Omega_j} \mathbf{n}_j (\psi_\nu \nabla T) d\sigma_j = \\ &= -\int_\Omega (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm - \sum_j c_j \left(-\int_{\Omega_j} \operatorname{div}(\psi_\nu \nabla T) dm\right) = \\ &= -\int_{\bigcup_j \Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm + \sum_j c_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm = \\ &= -\sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm + \sum_j c_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm = \\ &= \sum_j (-1 + c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy w tożsamości

$$\sum_j (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi_\nu) dm = 0 \tag{3}$$

przy $\nu \to \infty$, otrzymujemy:
$\sum_j (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi) dm = 0$.

Wniosek 2 *Dla każdej funkcji $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ klasy C^1 znikającej na $\partial\Omega$ zachodzi tożsamość:*

$$\sum_j (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\psi) dm = 0. \tag{4}$$

Niech teraz $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ klasy C^1 znika przy $\overline{\bigcup_j M_j} \cap \partial\Omega$ oraz na $\partial_I\Omega$. Zatem istnieje $\mathcal{O} \in$ top $\mathbf{R}^n$, takie że $\overline{\bigcup_j M_j} \cap \partial\Omega \subset \mathcal{O}$, $\varphi = 0$ na $\mathcal{O} \cap \Omega$. Funkcja φ jest ciągła w $\overline{\Omega}$, więc $\varphi = 0$ na $\mathcal{O} \cap \overline{\Omega}$. Zbiory zwarte

$$(\partial\Omega) \setminus \mathcal{O}, \qquad \overline{\bigcup_j M_j}$$

są rozłączne, więc ich dopełnienia stanowią pokrycie otwarte całej przestrzeni $\mathbf{R}^n$. W szczególności

$$\overline{\Omega} \subset (\setminus ((\partial\Omega) \setminus \mathcal{O})) \cup \Big(\setminus \overline{\bigcup_j M_j}\Big),$$

zatem na mocy twierdzenia o skończonym rozkładzie jedności, istnieją funkcje $\lambda_I, \lambda_{III} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, takie że

$$\operatorname{supp}\lambda_I \subset \setminus((\partial\Omega)\setminus\mathcal{O}), \quad \operatorname{supp}\lambda_{III} \subset \setminus \overline{\bigcup_j M_j}$$

oraz $\lambda_I + \lambda_{III} = 1$ w otoczeniu $\overline{\Omega}$. W szczególności

$$\begin{aligned} \lambda_I &= 0 \quad \text{na} \quad (\partial\Omega)\setminus\mathcal{O}, \\ \lambda_{III} &= 0 \quad \text{na} \quad \overline{\bigcup_j M_j}. \end{aligned}$$

Zatem $\varphi = \varphi_I + \varphi_{III}$, gdzie

$$\begin{aligned} \varphi_I &:= \varphi \cdot \lambda_I \quad - \quad \text{znika na } \partial\Omega, \\ \varphi_{III} &:= \varphi \cdot \lambda_{III} \quad - \quad \text{znika na } (\partial_I\Omega) \cup \bigcup_j M_j. \end{aligned}$$

Dlatego

$$\sum_j (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi_I)\, dm = 0,$$

$$\sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi_{III})\, dm = \sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi_{III} d\sigma.$$

Po dodaniu tych równań stronami, z uwzględnieniem, że φ_I znika na każdym $\partial_{III}\Omega_j$, otrzymujemy:

$$\sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm - \sum_j c_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi_I) = \\ = \sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma. \tag{5}$$

Natomiast biorąc pod uwagę, że $\partial\Omega_j = M_j \cup (\partial_I\Omega_j) \cup (\partial_{III}\Omega_j)$ jest sumą rozłączną, oraz φ_{III} znika na $M_j \cup \partial_I\Omega_j$ mamy:

$$\int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi_{III})\, dm = \int_{\Omega_j} \operatorname{div}(\varphi_{III}\nabla T)\, dm = \\ = -\int_{\partial\Omega_j} \mathbf{n}_j \varphi_{III} \nabla T d\sigma_j = -\int_{\partial_{III}\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_j}\varphi_{III} d\sigma_j = \\ = \int_{\partial_{III}\Omega_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\varphi_{III} d\sigma = \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T) d\sigma.$$

Z dowolności j:

$$\sum_j c_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi_{III})\, dm = \sum_j c_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma. \tag{6}$$

Odejmując to równanie od równania (5), dostajemy:

$$\sum_j (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla\varphi) dm = \\ = \sum_j (1 - c_j) \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma. \tag{7}$$

To samo rozumowanie można powtórzyć w ogólniejszym przypadku, gdy $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi_{|\partial_I\Omega} = 0$, φ znika przy $\overline{\bigcup_j M_j} \cap \partial\Omega$.

Rozważmy funkcję $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ taką, że $\varphi_{|\partial_I\Omega} = 0$. Zbiór $\overline{\bigcup_j M_j} \cap \partial\Omega$ zawiera się w skończonej sumie zwartych podrozmaitości kowymiaru 2, zatem istnieje ciąg funkcji $\gamma_\nu : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ klasy C^1 $(\nu = 1, 2, \ldots)$ takich, że

a) $\forall_\nu : \varphi_\nu := \gamma_\nu\varphi$ znika przy $\overline{\bigcup_j M_j} \cap \partial\Omega$;

b) $\varphi_\nu \to \varphi$ słabo w $H^1(\Omega)$ przy $\nu \to \infty$.

Każda z funkcji φ_ν spełnia tożsamość (7), więc spełnia ją także φ.

Wniosek 3 *Jeśli $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ oraz $\varphi_{|\partial_I\Omega} = 0$, to φ spełnia tożsamość (7).*

Niech w końcu $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi_{|\partial_I\Omega} = 0$. Wtedy dla $N \in \mathbf{N}$:

$\varphi_N := \max\{-N, \min\{N, \varphi\}\} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $(\varphi_N)_{|\partial_I\Omega} = 0$, zatem φ_N spełnia (7). Ponieważ $\varphi_N \to \varphi$ w $H^1(\Omega)$, także φ spełnia (7).

Wniosek 4 *Jeśli $\varphi \in H^1(\Omega)$ oraz $\varphi_{|\partial_I\Omega} = 0$, to φ spełnia tożsamość (7).*

K o n i e c   h e u r e z y

2. ŚCISŁE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Niech $\mathbf{N} \ni n \geq 2$, $\mathbf{R}^n \supset \Omega$ - obszar ograniczony z brzegiem lipschitzowskim. Zakładamy, że podzbiory $\Omega_1, \ldots, \Omega_s \in \operatorname{top}\Omega$ są parami rozłączne oraz

$$m\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^s \Omega_j\Big) = 0,$$

gdzie m miara Lebesque'a w $\mathbf{R}^n$.

Zbiór $\partial_I\Omega \in \mathcal{B}(\partial\Omega)$ oraz

$$\sigma(\partial_I\Omega) > 0.$$

(Dopuszczamy przypadek $s = 1$ lub $\partial_I\Omega = \partial\Omega$).

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \partial_{III}\Omega &:= (\partial\Omega) \setminus (\partial_I\Omega), \\ \partial_{III}\Omega_j &:= (\partial\Omega_j) \cap (\partial_{III}\Omega), \\ V &:= \{\varphi \in H^1(\Omega) : \quad \varphi_{|\partial_I\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

Zakładamy, że

$$\forall j \neq k \quad \sigma\left(\left(\partial_{III}\Omega_j\right) \cap \left(\partial_{III}\Omega_k\right)\right) = 0.$$

Dane są: $c_1, \ldots, c_s \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$;

b - restrykcja do $\partial_I \Omega$ pewnej funkcji z $H^1(\Omega)$;

$$\alpha \in \begin{cases} L^{n-1}\left(\partial_{III}\Omega\right) & \text{, gdy } n > 2, \\ L^{1+\varepsilon}\left(\partial_{III}\Omega\right) \text{ dla pewnego } \varepsilon > 0 & \text{, gdy } n = 2, \end{cases}$$

przy czym $\alpha \in L^p\left(\partial_{III}\Omega\right) :\Leftrightarrow \int_{\partial_{III}\Omega} |\alpha|^p \, d\sigma < \infty$;

$$\beta \in \begin{cases} L^{2-\frac{2}{n}}\left(\partial_{III}\Omega\right) & \text{, gdy } n > 2, \\ L^{1+\varepsilon}\left(\partial_{III}\Omega\right) \text{ dla pewnego } \varepsilon > 0 & \text{, gdy } n = 2. \end{cases}$$

Definicja 1 *Funkcja $T \in H^1(\Omega)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1) wtedy i tylko wtedy, gdy*

1° $T_{|\partial_I \Omega} = b$;

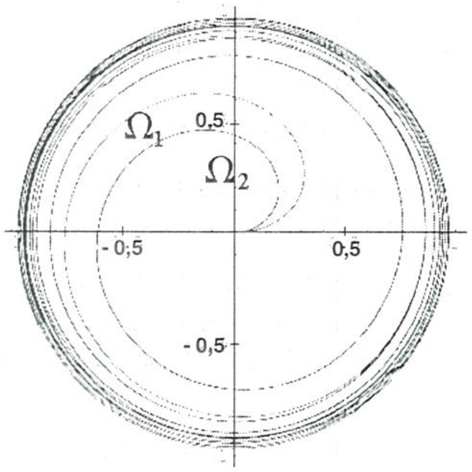
2° $\forall \varphi \in V$:

$$\sum_{j=1}^{s} (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi) dm =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} (1 - c_j) \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma, \tag{8}$$

przy czym przyjmujemy $\int_\emptyset := 0$.

Przykład 1 $\Omega := \left\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\right\}$. *Dwie „równoległe" spirale (np. o równaniach* $\rho_1(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta+1}$ *i* $\rho_2(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta+2}$, $\vartheta \in [0, \infty[$ *we współrzędnych biegunowych) startujące ze środka koła* Ω *i rozwijające się na okrąg* $\partial\Omega$ *wyznaczają*



dwa spójne zbiory $\Omega_1, \Omega_2 \in \operatorname{top} \Omega$, *takie że* $m\left(\Omega \setminus \left(\Omega_1 \cup \Omega_2\right)\right) = 0$, *lecz*

$$\partial\Omega \subset \left(\partial\Omega_1\right) \cap \left(\partial\Omega_2\right).$$

Zatem $\sigma\left(\left(\partial_{III}\Omega_1\right) \cap \left(\partial_{III}\Omega_2\right)\right) > 0$, *gdy tylko* $\sigma\left(\partial_{III}\Omega\right) > 0$.

Uwaga 1 *Rozwiązanie T zagadnienia (1) jest funkcją harmoniczną w każdym ze zbiorów* $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$.

Jeżeli $c_1 = c_2 = \ldots = c_s$, *to T jest harmoniczna w Ω oraz*

$$\forall \varphi \in V : \quad \int_\Omega (\nabla T)(\nabla \varphi) dm = \int_{\partial_{III}\Omega} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma. \tag{9}$$

Dowód. Niech $\varphi \in \mathcal{D}\left(\Omega_j\right)$. Funkcja $\overline{\varphi} := \varphi \cup 0 \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$, zatem

$$\sum_{k=1}^{s} (1 - c_k) \int_{\Omega_k} (\nabla T)(\nabla \overline{\varphi}) \, dm =$$

$$\sum_{k=1}^{s} (1 - c_k) \int_{\partial_{III}\Omega_k} (\beta - \alpha T)\overline{\varphi} d\sigma.$$

Prawa strona tej równości znika, gdyż $\overline{\varphi} = 0$ na $\partial\Omega$. Jasne, że

$$\int_{\Omega_k} (\nabla T)(\nabla \overline{\varphi}) \, dm = \begin{cases} \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi) dm & \text{, gdy } k = j \\ 0 & \text{, gdy } k \neq j. \end{cases}$$

Ostatecznie $(1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi) dm = 0$, czyli

$$0 = \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi) dm = -\left(\triangle \left[T_{|\Omega_j}\right]\right)(\varphi).$$

Z dowolności „φ": $\triangle\left[T_{|\Omega_j}\right] = 0$. Z lematu Weyla: $T_{|\Omega_j}$ jest funkcją harmoniczną.

Zbiór $\Omega \setminus \overline{\bigcup_j \Omega_j}$ $\left(\subset \Omega \setminus \bigcup_j \Omega_j\right)$ jest otwarty i miary zero, więc musi być pusty. Innymi słowy $\Omega \subset \overline{\bigcup_j \Omega_j}$. W konsekwencji $\overline{\Omega} \subset \overline{\bigcup_j \Omega_j}$ oraz $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega \subset \bigcup_j \partial\Omega_j$. Stąd $\partial_{III}\Omega = \bigcup_{j=1}^{s} \partial_{III}\Omega_j$ - suma rozłączna modulo 0 (względem σ).

Załóżmy, że $c_1 = \ldots = c_s \; (= c)$. Niech $\varphi \in V$. W tej sytuacji

$$\sum_j (1 - c_j) \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi =$$

$$= (1 - c) \sum_j \int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma =$$

$$= (1 - c) \int_{\partial_{III}\Omega} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma,$$

$$\sum_j (1 - c_j) \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi) dm =$$

$$= (1 - c) \sum_j \int_{\Omega_j} (\nabla T)(\nabla \varphi) dm =$$

$$= (1 - c) \int_\Omega (\nabla T)(\nabla \varphi) dm.$$

Łącznie z tych wzorów i równości (8) wynika, że

$$\int_\Omega (\nabla T)(\nabla \varphi) dm = \int_{\partial_{III}\Omega} (\beta - \alpha T)\varphi d\sigma.$$

W szczególności dla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $-(\triangle[T])(\varphi)$ $\int_\Omega (\nabla T)(\nabla\varphi)dm = 0$.

Zatem $\triangle[T] = 0$ i na mocy lematu Weyla T jest harmoniczna w Ω.

c.k.d.

Uwaga 2 *Jeśli* $u \in H^1(\Omega)$, $\overline{b} \in H^1\Omega)$, $\overline{b}_{|\partial_I\Omega} = b$, *wtedy następujące warunki są równoważne:*

i) $u + \overline{b}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1);
ii) $u \in V$ oraz $\forall\varphi \in V$:

$$\sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\left(\int_{\Omega_j}(\nabla u)(\nabla\varphi)dm + \int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha u\varphi d\sigma\right) = \\ = \sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\left(\int_{\partial_{III}\Omega_j}\left(\beta-\alpha\overline{b}\right)\varphi d\sigma - \int_{\Omega_j}\left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi)dm\right) \tag{10}$$

<u>Dowód</u>. Oznaczmy $T := u + \overline{b}$. Niech $\varphi \in V$.

$$\begin{aligned}
& \sum_j (1-c_j)\int_{\Omega_j}(\nabla T)(\nabla\varphi)dm + \\
- & \sum_j (1-c_j)\int_{\partial_{III}\Omega_j}(\beta-\alpha T)\varphi d\sigma = \\
= & \sum_j (1-c_j)\int_{\Omega_j}(\nabla u)(\nabla\varphi)dm + \\
+ & \sum_j (1-c_j)\int_{\Omega_j}(\nabla\overline{b})(\nabla\varphi)dm + \\
- & \sum_j (1-c_j)\left(\int_{\partial_{III}\Omega_j}(\beta-\alpha\overline{b})\varphi d\sigma + \right. \\
- & \left. \int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha u\varphi d\sigma\right) = \\
= & \sum_j (1-c_j)\int_{\Omega_j}(\nabla u)(\nabla\varphi)dm + \\
+ & \sum_j (1-c_j)\int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha u\varphi d\sigma + \\
+ & \sum_j (1-c_j)\int_{\Omega_j}\left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi)dm + \\
- & \sum_j (1-c_j)\int_{\partial_{III}\Omega_j}\left(\beta-\alpha\overline{b}\right)\varphi d\sigma = \\
= & \sum_j (1-c_j)\left(\int_{\Omega_j}(\nabla u)(\nabla\varphi)dm + \right. \\
+ & \left. \int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha u\varphi d\sigma\right) + \\
- & \sum_j (1-c_j)\left(\int_{\partial_{III}\Omega_j}\left(\beta-\alpha\overline{b}\right)\varphi d\sigma + \right. \\
- & \left. \int_{\Omega_j}\left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi)dm\ \right)
\end{aligned}$$

c.k.d.

Twierdzenie 1 *Jeżeli* $\alpha \geq 0$ *oraz*

$$\forall\, j,k: \quad (1-c_j)(1-c_k) > 0,$$

to zagadnienie (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

<u>Dowód</u>. Łatwo zauważyć, że V jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni $H^1(\Omega)$, zaś $\varphi \longrightarrow \|\nabla\varphi\|_{L^2}$ jest normą dopuszczalną w V. Dla φ_1, φ_2, $\varphi \in V$ oznaczmy:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1,\varphi_2)_\alpha \ &:= \ \sum_{j=1}^{s}|1-c_j|\left(\int_{\Omega_j}(\nabla\varphi_1)(\nabla\varphi_2)\,dm + \right. \\
& \quad + \left.\int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha\varphi_1\varphi_2 d\sigma\ \right) \\
\|\varphi\|_\alpha \ &:= \ \sqrt{(\varphi,\varphi)_\alpha}.
\end{aligned}$$

Jasne, że $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\alpha$ jest iloczynem skalarnym w V, norma $\|\cdot\|_\alpha$ jest silniejsza od $\|\nabla(\,\cdot\,)\|_{L^2}$, a ściślej

$$\forall\varphi \in V: \quad \|\varphi\|_\alpha \geq \left(\min_{k\in\{1,\ldots,s\}}|1-c_k|\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla\varphi\|_{L^2}.$$

Pokażemy teraz, że norma $\|\cdot\|_\alpha$ jest słabsza od $\|\nabla(\,\cdot\,)\|_{L^2}$.

Załóżmy, że $n > 2$. Wtedy $\alpha \in L^{n-1}(\partial_{III}\Omega)$, $r: W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)$ restrykcja, $\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{2(n-1)} + \frac{n-2}{2(n-1)} = 1$.

Dlatego $\forall\varphi_1,\varphi_2 \in V$:

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha\varphi_1\varphi_2 d\sigma\right| \leq \int_{\partial_{III}\Omega}|\,\alpha\,|\,|\varphi_1|\,|\varphi_2|\,d\sigma \leq \\
\leq \ & \|\alpha\|_{L^{n-1}(\partial_{III}\Omega)}\cdot\|\varphi_1\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)}\cdot\|\varphi_2\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \leq \\
\leq \ & \|\alpha\|_{L^{n-1}(\partial_{III}\Omega)}\cdot|\,r\,|\cdot\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega)}\cdot|\,r\,|\cdot\|\varphi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq \\
\leq \ & \|\alpha\|_{L^{n-1}(\partial_{III}\Omega)}\cdot|\,r\,|\cdot|\,\imath\,|\cdot\|\nabla\varphi_1\|_{L^2}\cdot|\,r\,|\cdot|\,\imath\,|\cdot\|\nabla\varphi_2\|_{L^2}
\end{aligned}$$

gdzie $\imath$ jest inkluzją $\imath : (V, \|\nabla(\,\cdot\,)\|_{L^2}) \longrightarrow H^1(\Omega)$. W ten sposób udowodniliśmy, że forma dwuliniowa

$$V^2 \ni (\varphi_1,\varphi_2) \to \int_{\partial_{III}\Omega_j}\alpha\varphi_1\varphi_2 d\sigma \in \mathbf{R}$$

jest $\|\nabla(\,\cdot\,)\|_{L^2}$ - ciągła.

Podobnie rozumujemy w przypadku $n = 2$. Niech $q(\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. Wówczas $\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2q(\varepsilon)} + \frac{1}{2q(\varepsilon)} = 1$. Dalej

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{\partial_{III}\Omega}\alpha\varphi_1\varphi_2 d\sigma\right| \leq \\
\leq \ & \|\alpha\|_{L^{1+\epsilon}(\partial_{III}\Omega)}\cdot\|\varphi_1\|_{L^{2q(\epsilon)}(\partial\Omega)}\cdot\|\varphi_2\|_{L^{2q(\epsilon)}(\partial\Omega)} \leq \\
\leq \ & \|\alpha\|_{L^{1+\epsilon}(\partial_{III}\Omega)}\cdot c^2\cdot\|\varphi_1\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|\varphi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq \\
\leq \ & \|\alpha\|_{L^{1+\epsilon}(\partial_{III}\Omega)}\cdot c^2\cdot|\,\imath\,|^2\,\|\nabla\varphi_1\|_{L^2}\cdot\|\nabla\varphi_2\|_{L^2},
\end{aligned}$$

gdzie c oznacza normę operatora liniowego

$$H^1(\Omega) \overset{\text{inkluzja}}{\longrightarrow} W^{1,r}(\Omega) \overset{\text{restrykcja}}{\longrightarrow} L^{2q(\varepsilon)}(\partial\Omega),$$

przy czym $1 < r < 2$, $\frac{r}{2-r} = 2q(\varepsilon)$. Zatem dla wszelkich $n \geq 2$ normy $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2}$ są równoważne w V. Innymi słowy iloczyn skalarny $(\cdot\,,\,\cdot)_\alpha$ jest dopuszczalny w V.

Rozważmy, dla $w \in H^1(\Omega)$, funkcjonał liniowy

$$\xi_w : V \ni \varphi \to \sum_{j=1}^{s} |1-c_j| \left(\int_{\partial_{III}\Omega_j} (\beta - \alpha w)\varphi d\sigma - \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega_j} (\nabla w)(\nabla\varphi) dm \right).$$

Funkcjonał ξ_w jest $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2}$ ciągły, ponieważ $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2}$ ciągłe są funkcjonały:

$$V \ni \varphi \to \int_{\Omega_j} (\nabla w)(\nabla\varphi)dm,$$
$$V \ni \varphi \to \int_{\partial_{III}\Omega_j} \alpha w\varphi d\sigma,$$
$$V \ni \varphi \to \int_{\partial_{III}\Omega_j} \beta\varphi d\sigma.$$

Ciągłość ostatniego z tych funkcjonałów wynika z poniższych oszacowań.

Dla $n > 2$:

$$\left| \int_{\partial_{III}\Omega_j} \beta\varphi d\sigma \right| \leq \|\beta\|_{L^{2-\frac{2}{n}}(\partial_{III}\Omega)} \|\varphi\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)} \leq$$
$$\leq \|\beta\|_{L^{2-\frac{2}{n}}(\partial_{III}\Omega)} \cdot |\,r\,| \cdot \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dla $n = 2$:

$$\left| \int_{\partial_{III}\Omega_j} \beta\varphi d\sigma \right| \leq \|\beta\|_{L^{1+\varepsilon}(\partial_{III}\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q(\varepsilon)}(\partial\Omega)} \leq$$
$$\leq \|\beta\|_{L^{1+\varepsilon}(\partial_{III}\Omega)} \cdot |\,r\,| \cdot \|\varphi\|_{W^{1,s}(\Omega)},$$

gdzie $1 < s < 2$, $\frac{s}{2-s} = q(\varepsilon)$.

Istnienie. Istnieje $\overline{b} \in H^1(\Omega)$, takie, że $\overline{b}_{|\partial_I\Omega} = b$. Funkcjonał liniowy $\xi_{\overline{b}}$ jest ciągły na przestrzeni Hilberta $(V, (\cdot\,,\,\cdot)_\alpha)$, więc na mocy twierdzenia Riesza

$$\exists\, u \in V \quad \forall\, \varphi \in V : \quad (u, \varphi)_\alpha = \xi_{\overline{b}}(\varphi),$$

czyli

$$\sum_j |1-c_j| \left(\int_{\Omega_j} (\nabla u)(\nabla\varphi)dm + \int_{\partial_{III}\Omega_j} \alpha u\varphi d\sigma \right) =$$
$$= \sum_j |1-c_j| \left(\int_{\partial_{III}\Omega_j} \left(\beta - \alpha\overline{b}\right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega_j} \left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi)dm \right).$$

Istnieje $\tau \in \{-1, 1\}$ takie, że $|1-c_j| = \tau\,(1-c_j)$. Po podzieleniu obu stron ostaniej równości przez τ otrzymujemy:

$$\sum_j (1-c_j) \left(\int_{\Omega_j} (\nabla u)(\nabla\varphi)dm + \int_{\partial_{III}\Omega_j} \alpha u\varphi d\sigma \right) =$$
$$= \sum_j (1-c_j) \left(\int_{\partial_{III}\Omega_j} \left(\beta - \alpha\overline{b}\right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega_j} \left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi)dm \right).$$

Z Uwagi 2 wynika, że $u + \overline{b}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1).

Jednoznaczność. Niech T_1, T_2 będą rozwiązaniami zagadnienia (1). Wybierzmy $\overline{b} \in H^1(\Omega)$, takie, że $\overline{b}_{|\partial_I\Omega} = b$ Z Uwagi 2 wynika, że $u_k := T_k - \overline{b} \in V$ $(k = 1, 2)$ oraz $\forall\varphi \in V :$ $(u_k, \varphi)_\alpha = \xi_{\overline{b}}(\varphi)$. Stąd $\forall\varphi \in V :$ $(u_1 - u_2, \varphi)_\alpha = 0$. Wstawiając $\varphi = u_1 - u_2$ dostajemy: $\|u_1 - u_2\|_\alpha = 0$. W konsekwencji $u_1 = u_2$ i co za tym idzie $T_1 = T_2$.

c.k.d.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA (1) METODĄ GALERKINA

Twierdzenie 2 *Niech* $\overline{b} \in H^1(\Omega)$, $\overline{b}_{|\partial_I\Omega} = b$. *Zakładamy, że* $\alpha \geq 0$ *oraz* $\forall j, k$: $(1-c_j)(1-c_k) > 0$, $(V_N)_{N=1}^{\infty}$ *- aproksymacja wewnętrzna przestrzeni Hilberta* $(V, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$, *gdzie* $\langle\varphi, \psi\rangle := \int_\Omega (\nabla\varphi)(\nabla\psi)dm$. *Wtedy*

a) dla dowolnego N *zagadnienie wariacyjne*

$$\forall\varphi \in V_N : \quad \sum_{j=1}^{s} (1-c_j) \left(\int_{\Omega_j} (\nabla u_N)(\nabla\varphi)dm + \right.$$
$$\left. + \int_{\partial_{III}\Omega_j} \alpha u_N \varphi d\sigma \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{s} (1-c_j) \left(\int_{\partial_{III}\Omega_j} \left(\beta - \alpha\overline{b}\right) \varphi d\sigma - \right.$$
$$\left. - \int_{\Omega_j} \left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi)dm \right)$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $u_N \in V_N$;

b) $\lim_{N\to\infty} \left(u_N + \overline{b}\right) = T$ *w* $H^1(\Omega)$,

gdzie T *jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia (1).*

Dowód. W dowodzie Twierdzenia 1 stwierdziliśmy, że $(\cdot\,,\,\cdot)_\alpha$ jest dopuszczalnym iloczynem skalarnym w przestrzeni Hilberta $(V, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$, zaś funkcjonał $\xi_{\overline{b}}$ jest ciągły na tej przestrzeni. Łatwo pokazać, że

$$\forall N \in \mathbf{N}\ \exists!\, u_N \in V_N\ \forall\varphi \in V_N \quad (u_N, \varphi)_\alpha = \xi_{\overline{b}}(\varphi),$$

czyli

$$\sum_j |1-c_j| \left(\int_{\Omega_j} (\nabla u_N)(\nabla\varphi) dm + \int_{\partial_{III}\Omega_j} \alpha u_N \varphi d\sigma \right) =$$

$$= \sum_j |1-c_j| \left(\int_{\partial_{III}\Omega_j} \left(\beta - \alpha\bar{b}\right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega_j} \left(\nabla\bar{b}\right)(\nabla\varphi) dm \right).$$

Po obustronnym wydzieleniu przez $\tau := \operatorname{sgn}(1-c_1)$ dostajemy, że u_N jest rozwiązaniem zagadnienia wariacyjnego z części a) tezy. Ciąg (u_N) jest zbieżny w V do $u \in V$, takiego że

$$\forall \varphi \in V: \quad (u,\varphi)_\alpha = \xi_{\bar{b}}(\varphi),$$

czyli

$$\sum_j |1-c_j| \left(\int_{\Omega_j} (\nabla u)(\nabla\varphi) dm + \int_{\partial_{III}\Omega_j} \alpha u \varphi d\sigma \right) =$$

$$= \sum_j |1-c_j| \left(\int_{\partial_{III}\Omega_j} \left(\beta - \alpha\bar{b}\right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega_j} \left(\nabla\bar{b}\right)(\nabla\varphi) dm \right).$$

Z Twierdzenia 2 wynika, że $T = u + \bar{b}$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia (1). Jasne, że $u_N + \bar{b} \longrightarrow u + \bar{b} = T$ w $H^1(\Omega)$.

c.k.d.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA (1) METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W PRZYPADKU $\Omega \subset \mathbf{R}^2$

Na wstępie wprowadzimy kilka pojęć związanych z dyskretyzacją problemu (1).

Definicja 2 *Triangulacją płaszczyzny* $\mathbf{R}^2$ *nazywamy zbior trójkątów*
$\mathcal{T} := \{\triangle : \triangle$ *trójkąt*, $\triangle \subset \mathbf{R}^2\}$, *taki, że:*
a) $\bigcup_{\triangle\in\mathcal{T}} \triangle = \mathbf{R}^2$,
b) Jeśli $\triangle_1, \triangle_2 \in \mathcal{T}$, *oraz* $\triangle_1 \neq \triangle_2$, *to* $m(\triangle_1 \cap \triangle_2) = 0$, *gdzie* m *miara Lebesque'a w* $\mathbf{R}^2$.

Definicja 3 *Mówimy, że triangulacja* $\mathcal{T}$ *jest* δ*-regularna, gdy* $\mathcal{T}$ *składa się z trójkątów równobocznych o boku* δ.

Jeden ze sposobów generowania triangulacji δ-regularnej został zaprezentowany w pracy (Holly i Mosurski, 1997).

Niech $\operatorname{vert}(\triangle)$ oznacza zbiór wierzchołków trójkąta $\triangle \in \mathcal{T}$.
Niech $\mathbf{R}^2 \subset \Omega$ - obszar ograniczony, $\Omega_1, \ldots, \Omega_s \in \operatorname{top}\Omega$,

$$m\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j\Big) = 0,$$

gdzie m - miara Lebesque'a w $\mathbf{R}^2$. Zakładamy, że

$$\forall \triangle \in \mathcal{T}: \quad \operatorname{bar}\triangle \notin \Omega \cap \bigcup_j \partial\Omega_j,$$

gdzie $\operatorname{bar}\triangle$ oznacza środek masy trójkąta $\triangle$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Omega) &:= \{\triangle \in \mathcal{T}: \quad \operatorname{bar}\triangle \in \Omega\}, \\ \mathcal{T}(\Omega_j) &:= \{\triangle \in \mathcal{T}: \quad \operatorname{bar}\triangle \in \Omega_j\}, \\ \Omega(\mathcal{T}) &:= \bigcup_{\triangle\in\mathcal{T}(\Omega)} \triangle, \\ \Omega_j(\mathcal{T}) &:= \bigcup_{\triangle\in\mathcal{T}(\Omega_j)} \triangle. \end{aligned}$$

Zakładamy, że $\operatorname{int}\Omega(\mathcal{T})$ jest spójny. Wówczas, ponieważ $\Omega \subset \bigcup_j \overline{\Omega_j}$, mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Omega) &= \bigcup_j \mathcal{T}(\Omega_j) \quad \text{- suma rozłączna}, \\ \Omega(\mathcal{T}) &= \bigcup_j \Omega_j(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Niech W oznacza zbiór wierzchołków triangulacji $\mathcal{T}(\Omega)$. Wtedy $W_j := W \cap \Omega_j(\mathcal{T})$ stanowi zbiór wierzchołków triangulacji $\mathcal{T}(\Omega_j)$.
Dla $w \in W_j$ oznaczamy

$$Sas_j(w) := \{v \in W_j : \exists \triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j), \text{że } \{v,w\} \subset \operatorname{vert}(\triangle)\}.$$

Rozważmy rozkład

$$\partial\Omega(\mathcal{T}) = (\partial_I\Omega(\mathcal{T})) \cup (\partial_{III}\Omega(\mathcal{T})),$$

gdzie $\partial_I\Omega(\mathcal{T})$, $\partial_{III}\Omega(\mathcal{T})$ - skończone sumy łamanych o wierzchołkach z W,

$$\sharp\left((\partial_I\Omega(\mathcal{T})) \cap (\partial_{III}\Omega(\mathcal{T}))\right) < \infty.$$

Z uwagi na to , że $\Omega(\mathcal{T}) \subset \bigcup_j \Omega_j(\mathcal{T})$ - domknięty, $\partial\Omega(\mathcal{T}) \subset \bigcup_j \partial\Omega_j(\mathcal{T})$ mamy

$$\partial_{III}\Omega(\mathcal{T}) = \bigcup_{j=1}^{s} \partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T}),$$

gdzie $\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T}) := (\partial_{III}\Omega(\mathcal{T})) \cap (\partial\Omega_j(\mathcal{T})) = (\partial_{III}\Omega(\mathcal{T})) \cap \Omega_j(\mathcal{T})$.

Uwaga 3 *Jeśli* $j \neq k$, *to* $\Omega_j(\mathcal{T}) \cap \Omega_k(\mathcal{T}) \cap \partial\Omega(\mathcal{T}) \subset W$.

Dowód. Niech $a \in \Omega_j(\mathcal{T}) \cap \Omega_k(\mathcal{T}) \cap \partial\Omega(\mathcal{T})$ dla pewnych $j \neq k$. Jeśli węzeł $a \in \Omega(\mathcal{T})$, to $\exists \triangle_\star \in \mathcal{T}(\Omega)$ taki, że $a \in \triangle_\star$. Jeśli $a \in \partial\Omega(\mathcal{T})$, to $a \notin \operatorname{int}\triangle_\star$. Zatem $\exists\, v, w \in \operatorname{vert}\triangle_\star : \quad a \in [v,w]$.

Hipoteza. $a \notin W$.

W takim razie $a \in]v, w[$. Niech $\widetilde{\triangle} \in \mathcal{T}(\Omega)$, taki, że $a \in \widetilde{\triangle}$. Gdyby $\widetilde{\triangle} \neq \triangle_\star$, to trójkąty $\widetilde{\triangle}$ i $\triangle_\star$ byłyby przyległe oraz $a \in \operatorname{int}\left(\widetilde{\triangle} \cup \triangle_\star\right) \subset \operatorname{int} \Omega(\mathcal{T})$, a to stanowi sprzeczność z założeniem $a \in \partial\Omega(\mathcal{T})$.

Zatem $\widetilde{\triangle} = \triangle_\star$. Wobec tego $\triangle_\star$ jest jedynym trójkątem triangulacji $\mathcal{T}(\Omega)$ zawierającym punkt „a".

Jeśli $a \in \Omega_j(\mathcal{T})$, to $\exists \triangle_j \in \mathcal{T}(\Omega_j) : a \in \triangle_j$. Podobnie, jeśli $a \in \Omega_k(\mathcal{T})$, to $\exists \triangle_k \in \mathcal{T}(\Omega_k) : a \in \triangle_k$. Z konieczności $\triangle_j = \triangle_\star$ oraz $\triangle_k = \triangle_\star$ i w konsekwencji $\triangle_\star \in \mathcal{T}(\Omega_j) \cap \mathcal{T}(\Omega_k) = \emptyset$ co stanowi sprzeczność.

c.k.d

Wniosek 5 *Jeśli* $j \neq k$, *to* $(\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T})) \cap (\partial_{III}\Omega_k(\mathcal{T})) \subset W$.

W szczególności

Wniosek 6 *Zbiory* $(\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T}))_{j=1}^{s}$ *są rozłączne modulo* 0 *względem* σ, *gdzie* σ *jest miarą euklidesową na* $\partial\Omega(\mathcal{T})$.

Dla $w \in W$ rozważmy jedyną funkcję ciągłą

$$\varphi_w : \Omega(\mathcal{T}) \to \mathbf{R},$$

taką, że

i) $(\varphi_w)_{|\triangle}$ jest afiniczna dla wszelkich $\triangle \in \mathcal{T}(\Omega)$;

ii) $\forall\, v \in W : \quad \varphi_w(v) = \delta_{vw}$.

Oznaczmy:

$$\begin{aligned}\overline{b} &:= \sum_{w \in W_I} b(w)\varphi_w,\\ \overline{\alpha} &:= \sum_{w \in W_{III}} \alpha(w)\varphi_w,\\ \overline{\beta} &:= \sum_{w \in W_{III}} \beta(w)\varphi_w,\end{aligned}$$

gdzie $W_I := W \cap \partial_I\Omega(\mathcal{T})$, $W_{III} := W \cap \partial_{III}\Omega(\mathcal{T})$. Funkcja $\overline{b}$ jest dopuszczalnym rozszerzeniem funkcji b, natomiast $\overline{\alpha}$ i $\overline{\beta}$ są aproksymantami odpowiednio funkcji α i β.

Poszukujemy rozwiązania zagadnienia (1) w postaci $T = u + \overline{b}$, gdzie

$$u = \sum_{w \in W \setminus W_I} \lambda_w \varphi_w,$$

przy czym $\lambda_w \in \mathbf{R}$ są nieznanymi współczynnikami. Zauważmy, że

$$\forall\, w \in W \setminus W_I : \quad u(w) = \lambda_w.$$

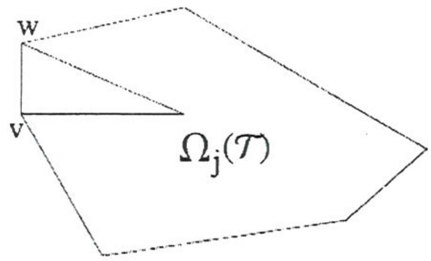
Zgodnie z Twierdzeniem 2, każdemu $w \in W \setminus W_I$ odpowiada równanie liniowe:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\left(\left(\int_{\Omega_j(\mathcal{T})}(\nabla u)(\nabla\varphi_w)\,dm + \right.\right.\\ &+ \left.\int_{\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T})} \overline{\alpha} u \varphi_w d\sigma\right) =\\ &= \sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\left(\int_{\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T})}\left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\overline{b}\right)\varphi_w d\sigma + \right.\\ &- \left.\int_{\Omega_j(\mathcal{T})}\left(\nabla\overline{b}\right)(\nabla\varphi_w)\,dm\right) \qquad (11)\end{aligned}$$

z niewiadomymi $(\lambda_v)_{v \in w \cup (Sas(w) \setminus W_I)}$, gdzie

$$Sas(w) := \{v \in W : \ [v, w] \text{ jest bokiem pewnego trójkąta z } \mathcal{T}(\Omega)\} = \bigcup_{\{j:\, w \in W_j\}} Sas_j(w)$$

Obserwacja 1 *Na ogół* $Sas_j(w) \not\supset W_j \cap Sas(w)$ *o czym świadczy przykład*



Podstawiając wyrażenia na $\overline{b}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, u$ do równania (11) dostajemy po przegrupowaniu wyrazów równanie:

$$\sum_{v \in W \setminus W_I} M_{wv}\lambda_v = H_w \quad (w \in W \setminus W_I), \qquad (12)$$

gdzie

$$M_{wv} := \sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\left(I_j(\nabla v, \nabla w) + \sum_{p \in W_{III}} \alpha(p) I_{III,j}(p, v, w)\right)$$

$$\begin{aligned}H_w := &\sum_{p \in W_{III}} \beta(p)\left(\sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\, I_{III,j}(p, w)\right) + \\ &- \sum_{q \in W_I} b(q)\left(\sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\, I_j(\nabla q, \nabla w)\right) + \\ &- \sum_{p \in W_{III}}\sum_{q \in W_I} \alpha(p) b(q)\left(\sum_{j=1}^{s}(1-c_j)\, I_{III,j}(p, q, w)\right),\end{aligned}$$

$$I_j(\nabla q, \nabla w) := \int_{\Omega_j(\mathcal{T})}(\nabla\varphi_q)(\nabla\varphi_w)\,dm,$$

$$I_{III,j}(q, w) := \int_{\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T})} \varphi_q\varphi_w d\sigma,$$

$$I_{III,j}(p, q, w) := \int_{\partial_{III}\Omega_j(\mathcal{T})} \varphi_p\varphi_q\varphi_w d\sigma.$$

Ze względów praktycznych wygodnie jest rozszerzyć układ (12) na wszystkie węzły triangulacji do postaci

$$\sum_{v \in W} \widetilde{M}_{wv} \lambda_v = \widetilde{H}_w \quad (w \in W), \qquad (13)$$

gdzie

$$\widetilde{M}_{wv} := \begin{cases} M_{vw} & , \text{gdy} \quad w \in W \setminus W_I \\ \delta_{vw} & , \text{gdy} \quad w \in W_I \end{cases} \qquad (v \in W),$$

$$\widetilde{H}_w := \begin{cases} H_w & , \text{gdy} \quad w \in W \setminus W_I \\ 0 & , \text{gdy} \quad w \in W_I \end{cases}$$

a δ_{vw} oznacza deltę Kroneckera.

Wprowadzając oznaczenia: $M := \left(\widetilde{M}_{wv}\right)_{w,v \in W}$, $\Lambda := (\lambda_v)_{v \in W}$, $H := \left(\widetilde{H}_w\right)_{w \in W}$ możemy układ (13) zapisać w zwartej postaci

$$M\Lambda = H.$$

Macierz M tego układu jest macierzą symetryczną.

Całki $I_j(\nabla q, \nabla w)$, $I_{III,j}(q, w)$, $I_{III,j}(p, q, w)$ można rozpisać w postaci sum:

$$\begin{aligned} I_j(\nabla q, \nabla w) &= \sum_{\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)} \int_{\triangle} (\nabla \varphi_q)(\nabla \varphi_w)\, dm, \\ I_{III,j}(q, w) &= \sum_{\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)} \int_{\partial_{III}\Omega(\mathcal{T}) \cap \triangle} \varphi_q \varphi_w d\sigma, \\ I_{III,j}(p, q, w) &= \sum_{\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)} \int_{\partial_{III}\Omega(\mathcal{T}) \cap \triangle} \varphi_p \varphi_q \varphi_w d\sigma. \end{aligned}$$

Proste rachunki prowadzą do poniższych wzorów na całki w powyższych sumach.

Uwaga 4 *Jeśli* $\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)$, $a_1 \neq a_2$, $vert(\triangle) = \{a_1, a_2, a\}$, *to*

$$\int_{\triangle} (\nabla \varphi_{a_1})(\nabla \varphi_{a_2})\, dm = -\frac{1}{2} \frac{(a - a_1, a - a_2)}{|\det(a - a_1, a - a_2)|}.$$

Jeśli $\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)$, $vert(\triangle) = \{a_1, a_2, a\}$, *to*

$$\int_{\triangle} (\nabla \varphi_a)(\nabla \varphi_a)\, dm = \frac{1}{2} \frac{(a_1 - a_2, a_1 - a_2)}{|\det(a - a_1, a - a_2)|}.$$

Jeśli $\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)$, $a_1 \notin vert(\triangle)$ *lub* $a_2 \notin vert(\triangle)$, *to*

$$\int_{\triangle} (\nabla \varphi_{a_1})(\nabla \varphi_{a_2})\, dm = 0.$$

Uwaga 5 *Jeśli* $\triangle \in \mathcal{T}(\Omega_j)$, $[p, q] := \partial_{III}\Omega(\mathcal{T}) \cap \triangle$, *to*

$$\begin{aligned} \int_{[p,q]} \varphi_p^2 d\sigma &= \int_{[p,q]} \varphi_q^2 d\sigma = \frac{1}{3}\sqrt{(p - q, p - q)}, \\ \int_{[p,q]} \varphi_p \varphi_q d\sigma &= \frac{1}{6}\sqrt{(p - q, p - q)}, \\ \int_{[p,q]} \varphi_p^3 d\sigma &= \int_{[p,q]} \varphi_q^3 d\sigma = \frac{1}{4}\sqrt{(p - q, p - q)}, \\ \int_{[p,q]} \varphi_p^2 \varphi_q d\sigma &= \int_{[p,q]} \varphi_p \varphi_q^2 d\sigma \frac{1}{12}\sqrt{(p - q, p - q)}. \end{aligned}$$

Całki z iloczynów pozostałych funkcji bazowych zerują się.

Przedstawiony sposób budowy macierzy i wektora prawych stron układu (13) jest znacznie prostszy i łatwiejszy do zakodowania w programie komputerowym od wzorów dla triangulacji δ-regularnej przedstawionych w pracy (Bożek i in., 1995). Sposób ten jest również znacznie bardziej efektywny, gdyż nie wymaga wyznaczania zbiorów trójkątów i węzłów triangulacji sąsiadujących z ustalonym węzłem. Ponadto nie trzeba ograniczać się do triangulacji δ-regularnych.

5. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA (1) METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W PRZYPADKU $\Omega \subset \mathbf{R}^3$

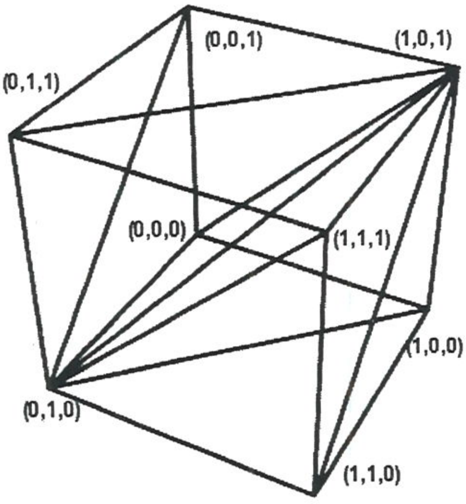
W stosunku do omówionego wcześniej przypadku $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, w sytuacji $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ zmieniają się pewne podstawowe definicje oraz wzory na całki $I_j(\nabla q, \nabla w)$, $I_{III,j}(q, w)$, $I_{III,j}(p, q, w)$, natomiast nie zmienia się kształt układu (13).

Definicja 4 *Triangulacją przestrzeni* $\mathbf{R}^3$ *nazywamy zbior czworościanów*
$\mathcal{T} := \{S : S$ *czworościan*, $S \subset \mathbf{R}^3\}$, *taki, że:*
a) $\bigcup_{S \in \mathcal{T}} S = \mathbf{R}^3$,
b) Jeśli $S_1, S_2 \in \mathcal{T}$, *oraz* $S_1 \neq S_2$, *to* $m(S_1 \cap S_2) = 0$, *gdzie* m *miara Lebesque'a w* $\mathbf{R}^3$.

Triangulację Ω można skonstruować następująco:

Dzielimy przestrzeń $\mathbf{R}^3$ na prostopadłościany (, równoległościany czy ogólnie graniastosłupy o ścianach, które są czworokątami). Następnie każdy z prostopadłościanów (graniastosłupów) dzielimy na sześć czworościanów. W modelowym sześcianie $[0, 1]^3 \in \mathbf{R}^3$ są to czworościany o wierzchołkach

$$
\begin{array}{l}
\{\ (0,1,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1),\ (0,0,0)\ \},\\
\{\ (0,1,0),\ (1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,0)\ \},\\
\{\ (0,0,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1),\ (0,0,1)\ \},\\
\{\ (1,1,0),\ (1,0,0),\ (0,0,0),\ (1,1,1)\ \},\\
\{\ (0,0,0),\ (1,0,1),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\ \},\\
\{\ (0,0,0),\ (1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,1)\ \}.
\end{array}
$$



Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym definiujemy:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(\Omega) &:= \{S \in \mathcal{T} : \ \mathrm{bar}S \in \Omega\},\\
\mathcal{T}(\Omega_j) &:= \{S \in \mathcal{T} : \ \mathrm{bar}S \in \Omega_j\},\\
\Omega(\mathcal{T}) &:= \bigcup_{S\in\mathcal{T}(\Omega)} S,\\
\Omega_j(\mathcal{T}) &:= \bigcup_{S\in\mathcal{T}(\Omega_j)} S,
\end{aligned}
$$

gdzie bar$S$ oznacza środek masy czworościanu S.

Aby wyprowadzić wzory na całki $I_j(\nabla q, \nabla w)$, $I_{III,j}(q,w)$, $I_{III,j}(p,q,w)$ wygodnie będzie skorzystać z ogólnych twierdzeń.

Lemat 1 *Niech X n-wymiarowa zorientowana przestrzeń euklidesowa, przy czym $n \geq 2$. Niech $w_0, w_1, \ldots, w_n \in X$ afinicznie niezależne punkty, a $w_0^\star, w_1^\star, \ldots, w_n^\star$ współrzędne barycentryczne względem $w_0, w_1, \ldots, w_n$. Wtedy*

1) $\forall\, \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{N} = \{0, 1, \ldots\}$:

$$
\int_{\mathrm{conv}\{w_0,\ldots,w_n\}} (w_0^\star)^{\alpha_0} \ldots (w_n^\star)^{\alpha_n}\, dm =
$$

$$
\frac{\alpha!}{(n+\mid\alpha\mid)!}\,|\det(w_1 - w_0, \ldots, w_n - w_0)| = \tag{14}
$$

$$
= \frac{n!\alpha!}{(n+\mid\alpha\mid)!} m\,(\mathrm{conv}\,(w_0, w_1, \ldots, w_n)),
$$

2) $m\,(\mathrm{conv}\,\{w_0, \ldots, w_n\}) =$

$$
\frac{1}{n!}\,|(w_1 - w_0) \times \ldots \times (w_n - w_0)|,
$$

3) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$
\nabla w_i^\star \equiv
$$

$$
\equiv (-1)^{n-i} \frac{(w_1 - w_0) \times \ldots \times (w_{i-1} - w_0) \times}{\det(w_1 - w_0, w_2 -}
$$

$$
\frac{(w_{i+1} - w_0) \times \ldots \times (w_n - w_0)}{w_0, \ldots, w_n - w_0)} \tag{15}
$$

gdzie $\alpha! := \alpha_0!\alpha_1!\ldots\alpha_n!$, $\mid\alpha\mid := \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mathrm{conv}\,\{w_0, \ldots, w_n\}$ *oznacza obwiednię wypukłą punktów* $w_0, \ldots, w_n$, $\det \in A_n(X)$ *przyjmuje wartość 1 na bazach ortonormalnych dodatnich, a „$\times$” oznacza uogólniony iloczyn wektorowy.*

Podobnie jak poprzednio, niech vert(S) oznacza zbiór wierzchołków czworościanu $S \in \mathcal{T}(\Omega)$. Jeśli vert$(S) = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$, to $(w_i^\star)_{|S} = \varphi_{w_i}$ $i = 0, 1, 2, 3$. Stosując Lemat 1 w przypadku $X = \mathbf{R}^3$ dostajemy szukane wzory na całki $I_j(\nabla q, \nabla w)$, $I_{III,j}(q,w)$, $I_{III,j}(p,q,w)$.

Uwaga 6 *Niech* $S \in \mathcal{T}(\Omega_j)$, vert$(S) = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$. *Załóżmy, że trójkąt* $\triangle := \partial_{III}\Omega(\mathcal{T}) \cap S$, vert$(\triangle) = \{p, q, r\}$ *oraz* $\{p, q, r\} \subset$ vert(S). *Wówczas*

$$
\begin{aligned}
\int_\triangle \varphi_p^2 d\sigma &= \int_\triangle \varphi_q^2 d\sigma = \int_\triangle \varphi_r^2 d\sigma = \frac{1}{10}\sigma(\triangle),\\
\int_\triangle \varphi_p\varphi_q d\sigma &= \int_\triangle \varphi_p\varphi_r d\sigma = \int_\triangle \varphi_q\varphi_r d\sigma = \frac{1}{20}\sigma(\triangle),\\
\int_\triangle \varphi_p^3 d\sigma &= \int_\triangle \varphi_q^3 d\sigma = \int_\triangle \varphi_r^3 d\sigma = \frac{1}{20}\sigma(\triangle),\\
\int_\triangle \varphi_p^2\varphi_q d\sigma &= \int_\triangle \varphi_p\varphi_q^2 d\sigma = \int_\triangle \varphi_r^2\varphi_q d\sigma = \int_\triangle \varphi_r\varphi_q^2 d\sigma =\\
&= \int_\triangle \varphi_p^2\varphi_r d\sigma = \int_\triangle \varphi_r\varphi_p^2 d\sigma = \frac{1}{60}\sigma(\triangle),\\
\int_\triangle \varphi_p\varphi_q\varphi_r d\sigma &= \frac{1}{120}\sigma(\triangle).
\end{aligned}
$$

Całki z iloczynów pozostałych funkcji bazowych zerują się.

6. DOBÓR STAŁYCH MATERIAŁOWYCH

W pracy (Danielewski i in., 1999) wyprowadzono związek między wartościami stałych materiałowych c_i, a współczynnikami przewodnictwa ciepła k_i w składowej Ω_i obszaru Ω. Otóż

$$
\forall i, j \in \{1, \ldots, s\} \quad \frac{1 - c_i}{k_i} = \frac{1 - c_j}{k_j}
$$

Stąd, oraz z pewnych rozważań fizycznych przeprowadzonych w pracy (Danielewski i in., 1999) wynika

Wniosek 7 *Dla wszystkich* $\varkappa \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *stałe* $c_1, \ldots, c_s$ *wyznaczone przez równania*

$$1 - c_i = \varkappa k_i \tag{16}$$

dają te same rozwiązania problemu (1), gdzie k_i *jest współczynnikiem przewodnictwa ciepła w składowej* Ω_i *obszaru* Ω.

7. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Niech

$\Omega := [-20, 200] \times [-50, 150]$,

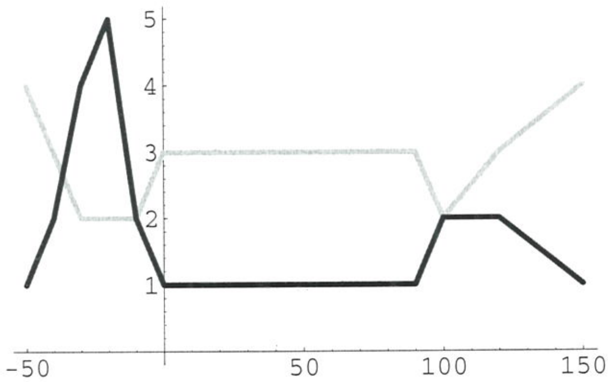
$\Omega_2 := K((2, -3), 15) \cup K((100, 75), 40) \cup K(110, -15), 23)$,

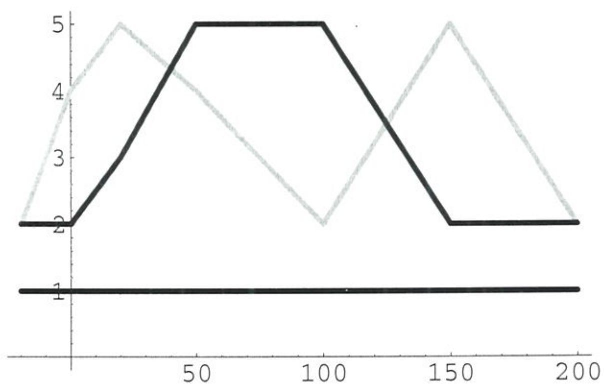
$\Omega_1 := \Omega \setminus \Omega_2$,

$\partial_I \Omega := \{-20\} \times [-50, 150] \cup \{200\} \times [-50, 150]$,

$\partial_{III} \Omega := [-20, 200] \times \{-50\} \cup [-20, 200] \times \{150\}$,

Wykres temperatury zadanej na bokach prostokąta Ω ilustruje poniższy rysunek: przy czym ciemno-szara linia odpowiada temperaturze zadanej na lewym boku Ω, a szara temperaturze zadanej na prawym boku. Na rysunku poniżej są przedstawione wykresy funkcji β - szara linia to wykres β na dolnym, a ciemno-szara linia wyres β na górnym boku prostokąta Ω. Funkcja α (czarna linia) jest funkcją stałą równą 1 na obu tzn. dolnym i górnym boku Ω.





Kolejne trzy rysunki przedstawiają izolinie temperatury w Ω dla trzech różnych wartości stałych materiałowych c_1, c_2.

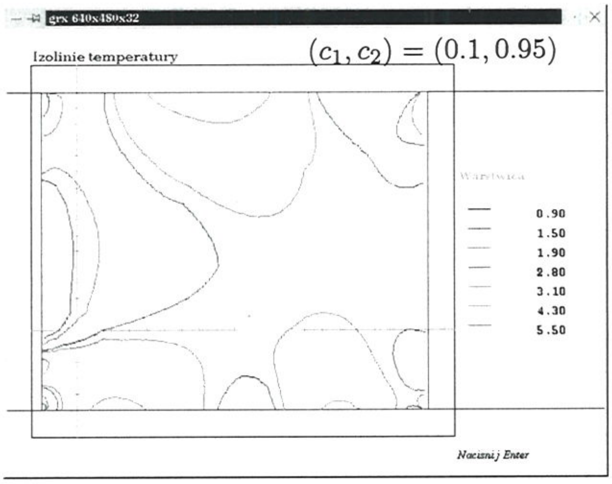
$(c_1, c_2) = (0.1, 0.95)$

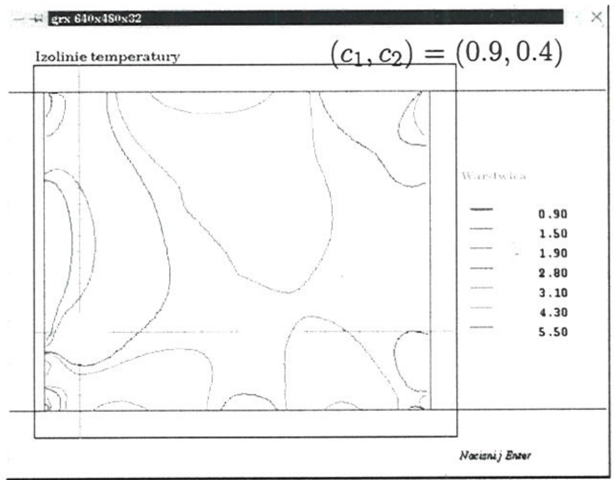
$(c_1, c_2) = (0.9, 0.4)$

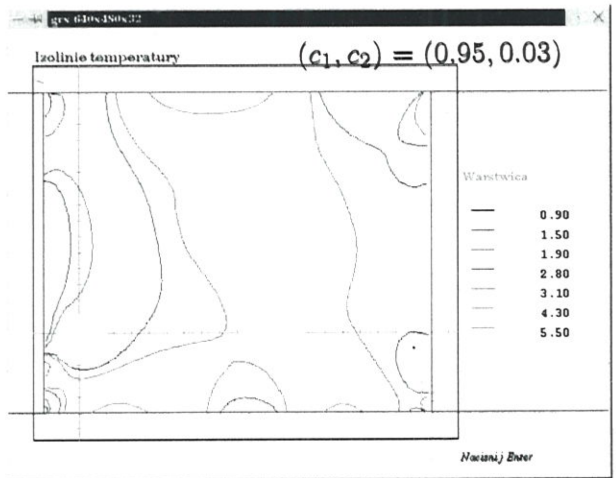
$(c_1, c_2) = (0.95, 0.03)$

Obliczenia zostały wykonane programem napisanym w języku C przez autora. Na stacji Miroway z procesorem Alpha 667 MHz, przy siatce 5433 węzły i 10574 trójkąty triangulacji, obliczenia trwają około 5 sekund. Kod źródłowy programu może zostać udostępniony zainteresowanym.

Kontakt: bozek@uci.agh.edu.pl







LITERATURA

Bobula E., 1990, Free boundary problem for spontaneous diffusion, *Fasc. Math.* vol. 19.

Bożek B., Holly K., Jaskólski J., 1992, Stacjonarny rozkład ciepła w tłoku, *Materiały Int. Conf. on Internal Combustion Engines KONES'92*, Wrocław - Szklarska Poręba, 57-63.

Bożek B., Holly K., Jaskólski J., 1993a, Variance methods for thermo load of elements of IC engine, *20th Int. Conf. on Combustion Engines CIMAC 1993*, London, D74.

Bożek B., Holly K., Jaskólski J., 1993b, Mixed boundary value problem for the stationary distribution of heat in a non-homogeneous medium, *Int. Conf. on Internal Combustion Engines and Motor Cars MO TAUTO'93*, Sofia-Semkovo, 13-20.

Bożek B., Holly K., Jaskólski J., 1995, Numeryczne aspekty wyznaczania rozkładu temperatur w tłoku silnika wysokoprężnego z wkładkami, *Teka Komisji Naukowo-Problemowej Motoryzacji PAN o/Kraków, Zeszyt 6 - Konstrukcja, Badania, Eksploatacja, Technologic pojazdów samochodowych i silników spalinowych*, 5-18.

Danielewski M., Krzyżański W., Figura B., Kita P., Pęcak G., 1999, The non-reduced solution of the Fischer model, grain boundary diffusion in R^3, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, 21, 55.

Holly K., Bożek B., Danielewski K., Krzyżański W., 1993, Własciwości termiczne materiałów niejednorodnych i wyznaczenie rozkładu temperatur dla stanów stacjonarnych złożonych elementów konstrukcyjnych, *Forum Materiałoznawstwa Energetycznego*, Politechnika Krakowska, nr 31.

Holly K., Mosurski R., 1997, Automatic triangulation in arbitrary two-dimensional domains, *Opuscula Mathematics*, vol. 17, 23-32.